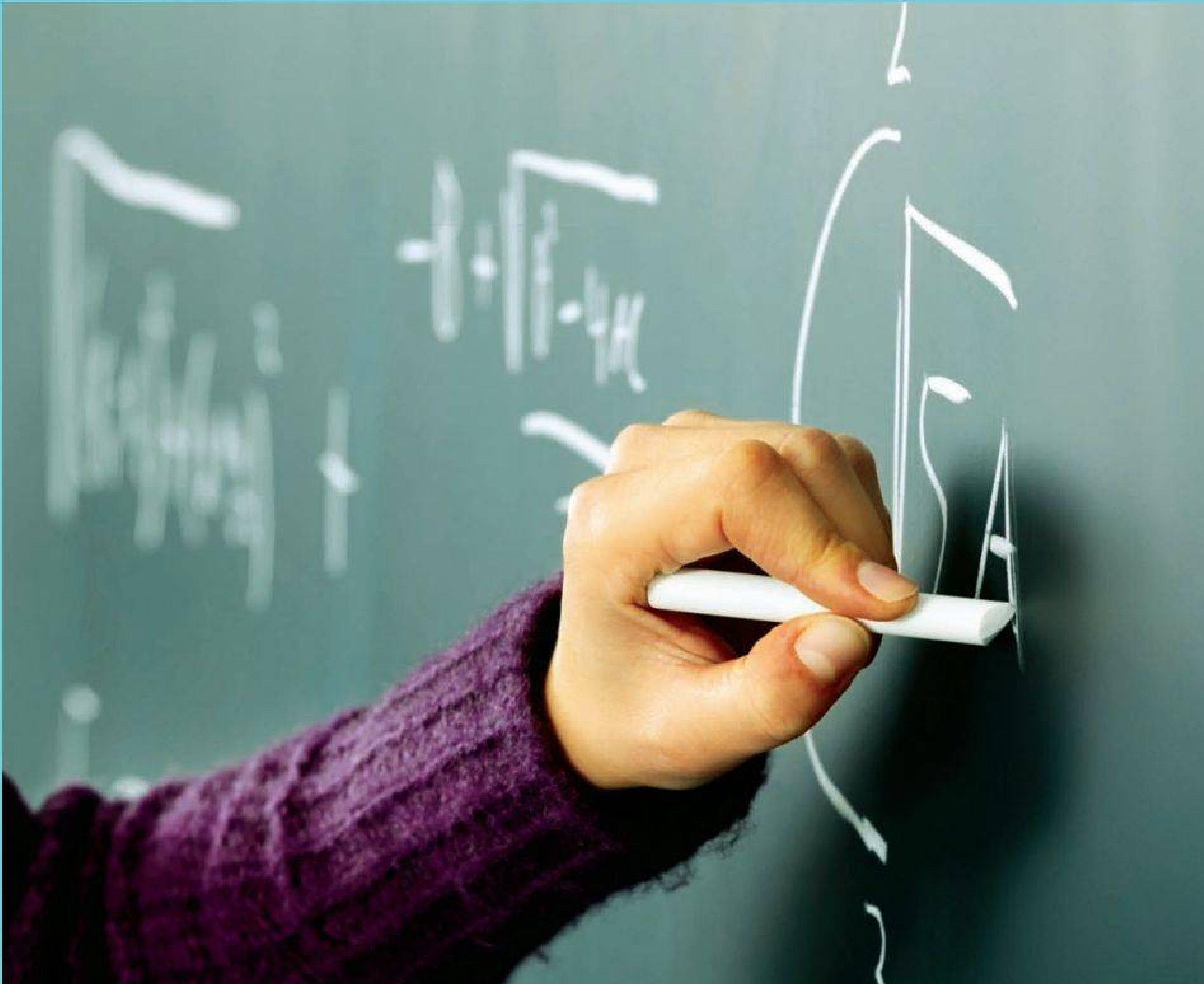
Álgebra

Basurto • Castillo



ALWAYS LEARNING

PEARSON

ÁLGEBRA

Eduardo Basurto Hidalgo
Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemáticas Educativas CINVESTAV

Gilberto Castillo Peña
Catedrático de la Escuela Normal Superior de México

Revisión técnica
Lorenzo Sánchez Alavez
Maestro de Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa CINVESTAV

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

BASURTO HIDALGO EDUARDO,
CASTILLO PEÑA GILBERTO
Álgebra
Primera edición
PEARSON EDUCACIÓN, México. 2012
ISBN: 978-607-32-0935-9
Área: Ciencias
Formato: 21 × 27 cm Páginas: 144

Adaptación de la obra:
- *"Matemáticas I"*, 1ª Edición, de Eduardo Basurto Hidalgo y Gilberto Castillo Peña, publicado por Pearson Educación de México S.A., publicada como Prentice Hall, Copyright © 2010. ISBN 978-607-442-426-3.

Editor:	Enrique Quintanar Duarte email: enrique.quintanar@pearson.com
Editor Custom:	Lilia Moreno Olvera
Editor de desarrollo:	Araceli Calderón Salas
Supervisores de producción:	Gustavo Rivas Romero y Juan José García Guzmán

PRIMERA EDICIÓN, 2012

D.R.© 2012 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5° Piso
Col. Industrial Atoto
C.P. 53519 Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031

ISBN: 978-607-32-0935-9
ISBN E-BOOK: 978-607-32-0936-6

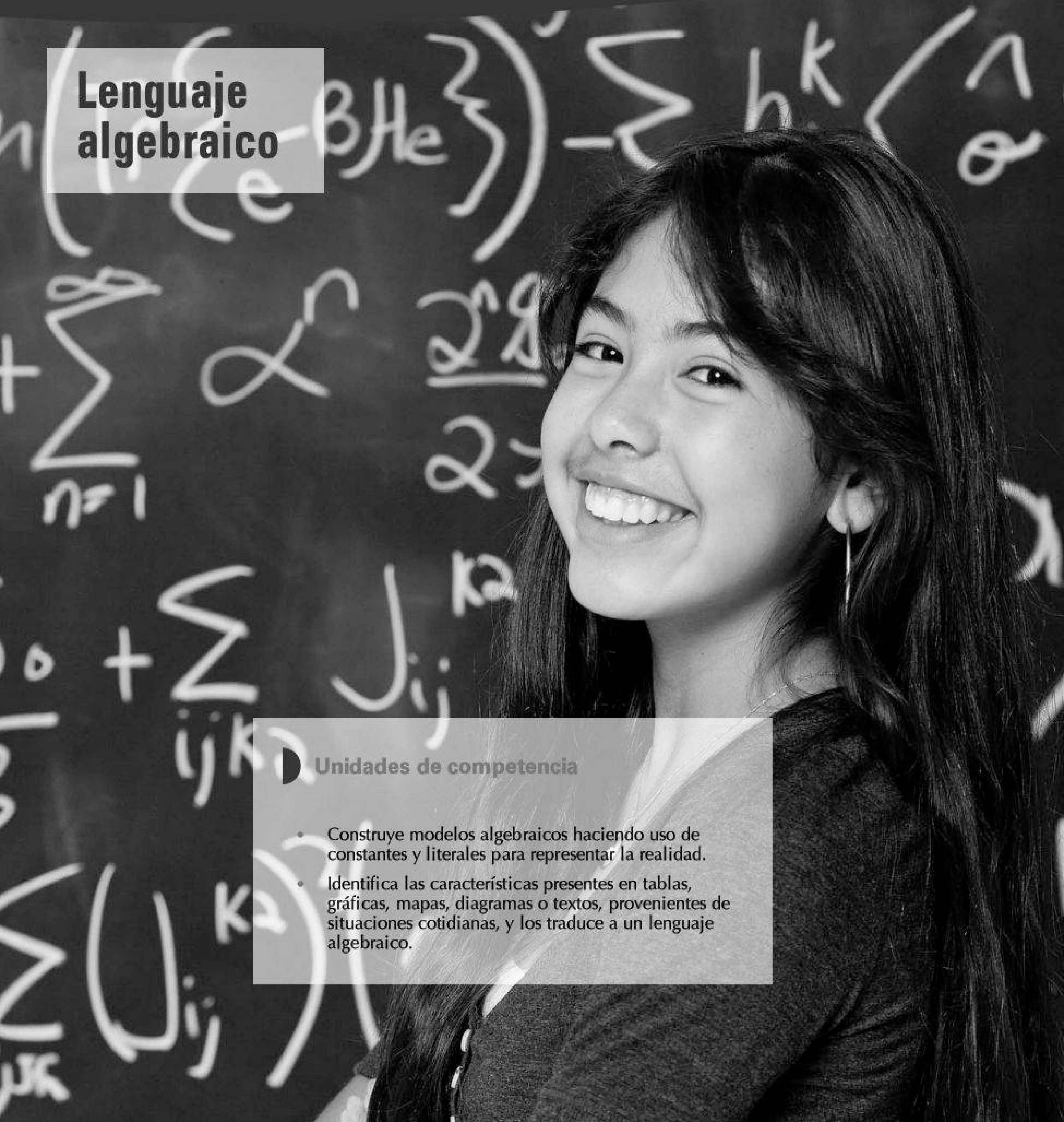
Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 14 13 12 11

PEARSON

www.pearsoneducacion.net

ÁLGEBRA

Parte 1



Lenguaje algebraico

Unidades de competencia

- Construye modelos algebraicos haciendo uso de constantes y literales para representar la realidad.
- Identifica las características presentes en tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y los traduce a un lenguaje algebraico.

Lenguaje algebraico
Competencias disciplinares

Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

Conocimientos

- Analiza y modela situaciones.
- Reconoce los elementos que integran una expresión algebraica.
- Distingue cómo se opera cada uno de los elementos de las expresiones algebraicas.

Habilidades

- Reconoce constantes y variables en problemas contextualizados.
- Representa con expresiones algebraicas situaciones diversas.
- Transforma expresiones algebraicas en representaciones equivalentes.

Actitudes y valores

- Asume una actitud de apertura que favorece la solución de problemas.
- Propone formas creativas de solucionar un problema.
- Asume una actitud de respeto y tolerancia hacia sus compañeros y hacia su entorno; en un clima de colaboración y ayuda mutua con responsabilidad logrando un estado de equidad e igualdad.

Bloque I Expresión algebraica

Lección 1

Transformaciones algebraicas I

PRODUCTO

El gobierno del estado de Chiapas, para promover el turismo nacional y extranjero, pone a disposición del público distintas rutas turísticas que pueden utilizarse para conocer la belleza que tiene nuestro estado.

Para ello, en la página de Internet de turismo estatal, muestra un mapa con líneas que representan las carreteras estatales y federales, en ellas se destacan las rutas utilizando como criterio el interés que puede tener un paseante, asimismo, se hace una descripción de lo que puede encontrarse en cada ruta.

A continuación mostramos el mapa tomado de la página de turismo estatal.

Tomado de: www.chiapaspictures.com/displayimage.php?album=48&pos=0

De esta forma las rutas turísticas son las siguientes:

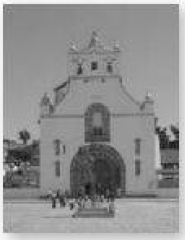
Ruta Maya

Sugiere al paseante una serie de destinos relacionados con las cultura maya, en ella se incluyen bellos destinos naturales, ecoturismo y ruinas arqueológicas; todos ellos relacionados con esta civilización.

Ruta Zoque

El eje central de esta ruta es la etnia zoque, o como ellos se hacen llamar O'depüt, que significa *gente de palabra*, en ella se puede experimentar la belleza natural que los rodea, sus costumbres, artesanías y arquitectura propias de este grupo de personas.

Ruta Culturas Vivas



Los chamulas, formados por las etnias mayas: tzotzil, tzeltal, mame, tojolobal y chol son el eje de interés que domina la Ruta Culturas Vivas, en ella destaca un recorrido en el que el paseante puede conocer algunas de las costumbres y edificaciones. Es un recorrido que destaca por su contenido cultural y social.

Ruta Dos Chiapas

En esta ruta destacan dos ciudades, Chiapa de Corzo y San Cristóbal, que representan el Chiapas colonial indígena y el Chiapas colonial de la corona española, que al mismo tiempo pueden ser dignos representantes de los leones en el escudo estatal. Esta ruta destaca por la belleza natural y cultural.

Ruta Costa Soconusco

Para los paseantes que gustan de los destinos costeros, se sugiere la Ruta Costa Soconusco, en ella destacan los manglares, el volcán Tacaná, los cafetales, plantaciones variadas y las playas.

Ruta Valles

Es un paseo por los valles chiapanecos, especialmente sugerido para el turista ávido de aventuras y experiencias deportivas, en ella se disfruta el turismo rural en el que se destacan haciendas y fincas del siglo XIX.

Ruta Camino Real

Paseo sugerido por la belleza natural acompañada por hermosos paisajes paradisiacos; el camino comienza en Comitán de Domínguez y termina a 90 kilómetros de la frontera guatemalteca. El trayecto sigue la carretera Panamericana.

Ahora deseamos construir un modelo matemático que permita elegir un itinerario en el que se pueda visitar algunas secciones de varias rutas y que sea cómodo en cuanto a la distancia entre cada uno de los destinos.

Para lograr el cometido empezaremos por introducir elementos matemáticos que representen distintas ventajas y desventajas.

1. Consideramos introducir la variable x, que es la suma de los puntos que tienen las poblaciones por las rutas que pasan por ella, por ejemplo, Chiapa de Corzo tendría 3 puntos debido a que por ella pasan 3 rutas turísticas, mientras que Pichucalco tiene 1 punto porque por ella pasa una sola ruta. De manera que si elegimos estos pueblos para visitar en nuestro itinerario, entonces $x = 4$, debido a que es la suma de los puntos de ambos pueblos.
2. Ahora tomaremos la variable y, que representa la suma de puntos por elegir pueblos o localidades que se encuentran una junto de la otra en una misma carretera; por ejemplo, si en el itinerario se eligen Jiquipilas y Cintalapa, entonces se gana un punto, ya que las poblaciones se encuentran en la misma carretera y una detrás de la otra; si se toma Jiquipilas, Cintalapa y Rosendo Salazar, la ruta tiene 2 puntos por estar estas poblaciones, una después de otra, en la misma carretera, en este último caso $y = 2$.
3. La variable z que utilizaremos en el itinerario se encuentra relacionada por el interés que tiene el turista que visita Chiapas; puede tomar 3 valores, 0 si el itinerario no considera ninguna población del interés del turista, 5 puntos si se eligen 3 poblaciones que tienen destinos de interés y 10 puntos si se incluyen más de 3 poblaciones que son de interés del turista.

Ahora podemos establecer un modelo matemático que permita elegir un itinerario, para ello utilizaremos el valor P, que se encuentra representado por la siguiente expresión algebraica:

$$P = x + y + z$$

El mejor itinerario es el que tiene la mayor cantidad de puntos.

Evalúa las siguientes rutas descritas a continuación de acuerdo con las condiciones y la expresión algebraica, utiliza el espacio para realizar las operaciones necesarias.

Un turista interesado en los deportes y la aventura considera los siguientes itinerarios. ¿Cuál de ellos resultaría más atractivo de acuerdo con la representación analítica?

1. Ocozocoautla, Cascada el Aguacero, Jiquipilas y Rosendo Salazar.

____

____

2. Berriozábal, Tuxtla Gutiérrez, San Cristóbal y Oxchuc.

____

____

3. Agua Azul Chabán, Agua Clara, Cascada Misoljá y Palenque.

____

____

Ahora considera las siguientes situaciones:

De los itinerarios que mencionamos en el problema anterior, ¿cuál puede resultar más adecuado para una persona interesada en visitar zonas relacionadas con etnias? Justifica tu respuesta haciendo uso de operaciones con la expresión algebraica.

Elige 5 localidades chiapanecas que convengan visitar a un turista interesado en destinos arqueológicos y que obtengan un buen puntaje al utilizar el modelo algebraico que hemos descrito. Utiliza el espacio para realizar operaciones.

Compara el itinerario que elegiste con el de tus compañeros. En el espacio que se muestra a continuación escribe el que consideres más adecuado y por qué.

Con la ayuda de tu profesor discutan qué otro tipo de variables pueden utilizarse en el modelo algebraico, por ejemplo, pueden considerar dar un puntaje por los destinos que pueden resultar más económicos, también pueden discutir si las variables descritas en el modelo que hemos utilizado son convenientes o carecen de sentido, en caso necesario, pueden substituir las variables por otras que sean más convenientes.

Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas, es importante considerar que es necesario justificar sus razones con sentidos matemáticos:

Lenguaje algebraico

Las operaciones básicas en matemáticas se caracterizan por símbolos como +, −, ,/, EXP (^) y radicales (√). En el lenguaje común, dichas operaciones llegan a ser expresadas de diferentes formas.

Completa la siguiente tabla:

Operación	Palabras que se asocian con esta operación	Otras palabras relacionadas
Suma	• agregar • aumentar	
Resta	• diferencia • disminuir	
Multiplicación	• producto • tantas veces	
División	• cociente • entre	

Veamos algunos ejemplos comunes:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico	Lenguaje común	Lenguaje algebraico
La suma de 10 y x	$10 + x$	La cuarta parte de un número	$\frac{a}{4}$
Un número aumentado en 7	$x + 7$	La raíz cuadrada de un número	$\sqrt{a}$
El producto de dos números	$a\,b$ o $(a)(b)$	Cinco veces un número	$5x$
El cociente de dos números	a/b o $\frac{a}{b}$	El cubo de la diferencia de dos números	$(x-y)^3$
Un número disminuido en 4	$y - 4$	El triple de c	$3c$
El cuadrado de un número	x^2	Un número a la cuarta potencia	a^4
El doble de la suma de dos números	$2(x + y)$	La diferencia del cubo de dos números	$x^3 - y^3$

Coloca la expresión que corresponda en cada enunciado; es decir, los enunciados en lenguaje natural escríbelos en lenguaje simbólico y viceversa.

1	$x + y$		**16**	Cinco veces z más 3.7	
2	Un número disminuido en 16		**17**	$(a + b)^3$	
3	Un tercio de W		**18**	$100 - (a - b)$	
4	Cinco tercios de la mitad de x		**19**	$k\,x^3$	
5	1 entre el doble de t		**20**	Ana tiene dos años más que Juan	
6	El doble de la suma de b y 1		**21**	Ramón es 4 años menor que Irma	
7	$a + b^3$		**22**	El costo de una docena de tortillas es n. ¿Cuánto cuesta una tortilla?	
8	El total de días en x horas		**23**	El costo de z kilos de chiles si cada kilo cuesta \$5	
9	18.24 veces un número		**24**	Si r son los días que llovió en el año, ¿cuántos días no llovió?	
10	Dos veces t menos 9		**25**	K veces un número	
11	El cociente de dos números es 100		**26**	Laura es 7.5 cm más alta que Pedro	
12	Tres décimos de la población infantil		**27**	La raíz cuadrada de la suma de dos números	
13	$(k\,x)^2$		**28**	El cubo de la diferencia del triple de un número menos el doble de otro	
14	La suma de dos números es 98		**29**	El cociente del cuadrado de dos números	
15	La quinta parte de un número es 15		**30**	El cuadrado del cociente de dos números	

El álgebra es utilizada para expresar situaciones en las que intervienen cantidades conocidas y desconocidas. Por ejemplo, podemos representar los siguientes enunciados haciendo uso del lenguaje algebraico:

1. Juanita agrega \$9 a lo que tiene ahorrado. Si x representa lo que había ahorrado Juanita, entonces sus nuevos ahorros pueden expresarse como:

$$x + 9$$

2. Juan perdió ocho fichas en el último juego. Si y representa el número de fichas que tenía Juan, entonces el número de fichas con las que se quedó después del juego es:

$$y - 8$$

3. Alberto duplicó el dinero que tenía en la última apuesta. Si z representa el dinero con el que contaba antes de la apuesta, entonces la cantidad con la que se quedó se puede expresar como:

$$2z$$

4. Pedro y José dividieron sus ganancias entre la mitad. Si q representa las ganancias que obtuvieron, entonces la cantidad que le tocó a cada uno se expresa como:

$$\frac{q}{2}$$

El lenguaje algebraico nos permite hacer operaciones con cantidades conocidas y desconocidas; para ello, nos valemos de literales, que pueden ser utilizadas como constantes, valores conocidos, valores desconocidos. Llegan a representar varios valores, infinidad de ellos, e incluso la ausencia de un valor que dé solución a un problema. En las siguientes situaciones se muestra la forma en la que el álgebra nos permite trabajar con ese tipo de cantidades:

Ejemplo 1

La mamá de Érika la deja en la tienda de autoservicio para que compre algunas cosas que necesita para la escuela.

1. Érika compra \$100 en útiles escolares. ¿Qué cantidad de dinero tiene después de la adquisición?

   Como la cantidad de dinero que tiene Érika no se conoce, entonces la representaremos con una literal, como por ejemplo S; ahora, mediante una diferencia, expresaremos qué parte de ese dinero se ha gastado:

$$S - 100$$

2. Al regresar a su casa, después de la compra de sus útiles escolares, Érika gasta \$20 en el pasaje. ¿Cuánto dinero tiene ahora?

Después de las compras, Érika cuenta con $S-100$ pesos, ahora debe regresar a su casa y gastar parte del dinero. Expresamos la cantidad que le queda como:

$$S-100-20$$

que también puede escribirse de manera simplificada como:

$$S-120$$

Ejemplo 2

Después de una semana jugando volados con sus compañeros, Manuel ha ganado cierta cantidad de tarjetas coleccionables. El día de hoy sale con la intención de seguir ganando.

1. Llegando a la escuela se enfrenta con su amigo Pedro y le gana 10 tarjetas. ¿Cuántas tarjetas tiene ahora Manuel?

   En vista de que no conocemos la cantidad de tarjetas que tenía Manuel al salir de su casa, entonces ocuparemos una literal para representarla; por ejemplo, la t. Por lo tanto, la representación de tarjetas de Manuel es:

   $$t+10$$

2. Después, Manuel pierde 12 de sus tarjetas con Luis. ¿Cuántas tarjetas le quedan a Manuel?

   $$t+10-12$$

   que puede simplificarse como:

   $$t-2$$

LO QUE APRENDÍ

I. En cada una de las siguientes situaciones representa la cantidad resultante haciendo uso de expresiones algebraicas.

1. Eduardo tiene una caja llena de tornillos. ¿Cuántos tornillos quedan en la caja después de los siguientes cambios?

   a) Ocupa ocho tornillos para sujetar una puerta.

   b) Utiliza cuatro tornillos para fijar una bomba de agua.

   c) Compra cinco tornillos y los deposita en la caja.

2. En una bolsa hay cierto número de canicas. Determina la expresión algebraica que implica el número de canicas dentro de la bolsa después de las siguientes situaciones:

   a) Se pierden 10 canicas en el primer juego.

   b) Se ganan 16 canicas en el segundo juego.

3. Se tiene una cantidad ahorrada en el banco. ¿Cuánto dinero queda en la cuenta bancaria después de los siguientes movimientos?:

   a) Se retiran $400 de la cuenta.

   b) Una semana después se depositan $600.

4. Un bibliotecario tiene almacenados cierto número de libros. ¿Con qué cantidad se queda si hace los siguientes cambios?:

   a) El bibliotecario duplica la cantidad de libros que guarda en su librería.

   b) Vende 16 libros el lunes.

   c) Vende 24 libros el martes.

   d) Compra 14 libros el miércoles.

   e) Vende un libro el jueves.

   f) Compra 80 libros el viernes.

5. Gustavo tiene cierto número de hojas blancas para sus trabajos escolares. ¿Cuántas hojas le quedan después de hacer las siguientes tareas?:

   a) Utiliza la mitad de las hojas en un trabajo.

   b) Compra 100 hojas para reponer las que ha utilizado.

   c) Utiliza 20 hojas en la siguiente tarea.

   d) Su hermana le regala 200 hojas.

Notación y clasificación

Función

Es un conjunto de parejas ordenadas de números (x, y), tales que en el conjunto no hay dos parejas ordenadas distintas que contengan el mismo primer número.

Ejemplo 1

Consideramos que el conjunto A, mostrado a continuación, es una función ya que las parejas ordenadas que lo forman son distintas y ninguno de los valores que se encuentra en la primera posición se encuentra repetido.

$$A = \{(1, 4), (2, 8), (3, 12,), (4, 16)\}$$

Algunas funciones se encuentran formadas por infinidad de parejas ordenadas, por lo que es necesario utilizar ecuaciones para representarlas.

Clasificación de funciones

Es necesario definir dos tipos de funciones especiales para, a partir de ella, establecer la clasificación de funciones.

Función identidad:
Su representación analítica es $f(x) = x$ y se encuentra formada por un conjunto de parejas ordenadas que tienen el valor de x y y iguales entre sí.

Función constante:
Tiene como representación analítica la expresión $f(x) = k$, donde k es un número real; son funciones en las que sus parejas ordenadas tienen en la primera posición distintos números, pero el valor de y se mantiene constante en un número.

A partir de estas definiciones podemos clasificar las funciones en dos tipos: las algebraicas y las trascendentes.

Las **funciones algebraicas** son aquellas que tienen como representación analítica expresiones que tienen operaciones algebraicas entre la función identidad y la función contante, dentro de ellas podemos considerar:

<table>
<tr><th colspan="2">Funciones algebraicas</th></tr>
<tr><td>Las funciones polinomiales: tienen como forma expresiones algebraicas que tienen forma de polinomios. Dentro de ellas podemos considerar las funciones lineales, cuadráticas y de grado superior.</td><td rowspan="4">Las funciones racionales: son aquellas que resultan de dividir dos funciones polinómicas.

Ejemplo:
$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 5x + 8}$$</td></tr>
<tr><td>Funciones lineales:
$f(x) = mx + b$</td></tr>
<tr><td>Funciones cuadráticas:
$f(x) = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>Funciones de grados superiores:
$g(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots + a_nx + a_{n+1}$</td></tr>
</table>

Las **funciones trascendentes** son aquellas en las que su representación analítica no pueden expresarse como funciones algebraicas. Dentro de ellas encontramos:

Ejemplos de funciones trascendentes
Las **funciones trigonométricas:** dentro de ellas encontramos las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante y sus inversas.
Las **funciones exponenciales:** que resultan de tener una constante elevada a la variable x. Su representación analítica es $f(x) = a^x$
Funciones logarítmicas: son aquellas que tienen como representación analítica expresiones que utilizan logaritmos. Por ejemplo: $T(x) = \log_b x$

Bloque II Operaciones fundamentales

Lección 1

Transformaciones algebraicas II

Información complementaria

- En un explorador de una computadora conectada a Internet escribe en la barra de dirección: *http://xrjunque.nom.es/precis/polycalc.aspx*. Se trata de una calculadora polinómica por medio de la cual podrás comprobar tus resultados o bien experimentar trasformaciones algebraicas que te parezcan interesantes.

Monomios y polinomios

Un monomio o término es una expresión que se encuentra formada por números y literales que indican una multiplicación; en un monomio no aparece la adición ni la sustracción. Por ejemplo:

$$5x^3y^2$$

Es un término o monomio, debido a que indica una multiplicación:

$$5x^3y^2 = 5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y$$

Ejemplos de monomios son:

$$9,\ 8x^2,\ 10x^3y^5,\ 4x^2y^4,\ 2m,\ 3mn^2$$

En un monomio es importante que los exponentes de las literales sean naturales.

Un polinomio se encuentra formado por dos o más monomios; definimos el polinomio de una variable como:

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

donde: a_1x^n, a_2x^{n-1}, a_3x^{n-2}, $a_{n-1}x$ y a_n son monomios o términos del polinomio; a_1, a_2, a_3 ..., a_{n-1}, a_n son llamados coeficientes y pertenecen a los números reales, mientras que n es un número natural.

Un polinomio recibe su nombre a partir del número de términos que tiene; así:

Nombre	Número de términos	Ejemplo
Monomio	Formado por un término	$6x$
Binomio	Formado por dos términos	$2x-8$
Trinomio	Formado por tres términos	$4x^2+5x-7$

Adición de polinomios (suma y resta)

Para empezar con las operaciones con polinomios es necesario que definamos los términos semejantes, que son aquellos que tienen las mismas letras y los mismos exponentes en cada literal. Ejemplos de términos semejantes son:

$$4x^2y^3 \text{ y } -8x^2y^3$$

$$\frac{3}{4}m^3n \text{ y } 8m^3n$$

No son términos semejantes:

$$4x^2y^3 \text{ y } -8x^3y^2$$

ya que aun cuando tienen las mismas literales, no tienen los mismos exponentes en cada una de las letras.

Para reducir términos semejantes es necesario que los términos sean semejantes; para ello, sumamos los coeficientes, mientras las literales se mantienen con sus exponentes.

Ejemplo 1

Sumar los polinomios $6x^3-9x+5x^2-10$ y $8x^3-7x^2-5+5x$.

Para reducir los términos semejantes, en primer momento es necesario identificarlos; a continuación, se suman o restan los coeficientes de acuerdo con el signo que tienen. Los términos semejantes en las expresiones son:

$$6x^3 \text{ y } 8x^3$$

$$5x^2 \text{ y } -7x^2$$

$$-9x \text{ y } 5x$$

$$-10 \text{ y } -5$$

Ahora sumamos o restamos los coeficientes de acuerdo con su signo, de manera que se obtiene:

$$\begin{aligned} 6x^3-9x+5x^2-10+(8x^3-7x^2-5+5x) &= 6x^3-9x+5x^2-10+8x^3-7x^2-5+5x \\ &= 14x^3-2x^2-4x-15 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Sumar los polinomios $-7x^3-4x^2+9+10x$ y $-12+8x^2+5-10x^3$.

Nuevamente, la primera tarea consiste en determinar los términos que son semejantes; para ello, ubicamos que éstos tienen las mismas literales con los mismos exponentes. Después, sumamos o restamos los coeficientes de acuerdo con su signo.

$$\begin{aligned} -7x^3-4x^2+9+10x+(-12+8x^2+5-10x^3) &= -7x^3-4x^2+9+10x-12+8x^2+5-10x^3 \\ &= -17x^3+4x^2+10x+2 \end{aligned}$$

Observa que cuando no hay otro término semejante con el cual sumar, entonces el término se pasa sin sufrir cambio.

Ejemplo 3

Restar $3x^2-5x+6$ de $6x^2+4x-8$.

Al número que le vamos a restar lo llamamos minuendo, mientras que el número que se va a restar es el sustraendo, de manera que la resta se puede expresar de la siguiente forma:

$$6x^2+4x-8-(3x^2-5x+6)$$

Observa cómo el sustraendo se coloca entre paréntesis para indicar la resta; este signo se multiplica por cada uno de los términos para efectuar la resta. Lo anterior es posible gracias a la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} 6x^2+4x-8-(3x^2-5x+6) &= 6x^2+4x-8-3x^2+5x-6 \\ &= 3x^2+9x-14 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

A $\frac{5}{6}x-9$ restar $-\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}$.

Ahora, en el enunciado se menciona primero al minuendo y después al sustraendo, por lo que escribimos y hacemos la resta de la siguiente forma:

$$\frac{5}{6}x-9-\left(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}x-9+\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}$$
$$=\frac{19}{12}x-\frac{55}{6}$$

LO QUE APRENDÍ

I. Realiza las sumas de las siguientes expresiones:

1. $3x,\ 8x$
2. $9m,\ 2m$
3. $5x,\ -7x$
4. $-5m,\ -4m$
5. $-3x,\ 9x$
6. $\frac{5}{4}q^2,\ \frac{1}{8}q^2$
7. $2x+9,\ 7x+4$
8. $5x-9,\ 2x+8$
9. $-7n+8,\ 4n-5$
10. $11x-2,\ -8x+6$

II. Efectúa las restas que a continuación se enuncian:

1. De $5x^2-8$, restar $4x^2+9$
2. De $9x+9$, restar $6x-7$

3. Restar $\frac{8}{5}x+1$ de $2x-10$

4. Restar $9x^2-10x$ de $8x-12x^2$

5. De $8x-3x^2$, restar $-5x^2+8$

6. De $9x-6$, restar $9x^2-11$

7. De $\frac{7}{12}m^2-8m+6$, restar $\frac{3}{4}m^2+8-\frac{1}{2}m$

8. Restar $9k-12+5k^2$ de $9k^2+9k-12$

9. Restar $7x-8-12x^2$ de $8x^2-7x+11$

10. De $7x^2+6x+11$, restar $8x-6x^2-11$

11. De $9n^3+4n^2+9n-12$, restar $5n^3-5n^2-12n+8$

III. Realiza los siguientes ejercicios de aplicación:

1. Proporciona cuatro frases que indiquen la operación de suma.

2. Proporciona cuatro frases que indiquen la operación de resta.

3. Proporciona cuatro frases que indiquen la operación de multiplicación.

4. Proporciona cuatro frases que indiquen la operación de división.

5. Explica por qué $c+0.25$ *no* representa el costo de un artículo incrementado en 25 por ciento.

6. Explica por qué $c-0.10$ *no* representa el costo de un artículo disminuido en 10 por ciento.

PRÁCTICA DE HABILIDADES

1. ***Edad.*** Guadalupe tiene una edad de n años. Escribe una expresión que represente su edad dentro de 7 años.

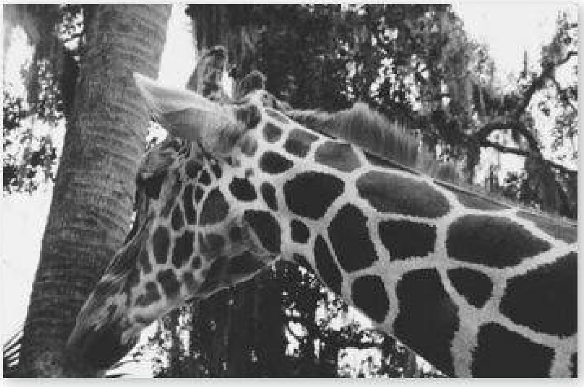
2. ***Edad.*** José Luis tiene una edad de t años. Escribe una expresión que represente la de Antonio, si éste tiene cuatro veces más edad que aquél.

3. ***Plumas.*** En una venta, una pluma marca Maya cuesta $4. Escribe una expresión que represente el costo de comprar *x* plumas.

4. ***Precio nuevo.*** Un artículo que cuesta *r* pesos es incrementado en $6. Escribe una expresión que represente el precio nuevo.

5. ***Motocicleta.*** Renata vende su motocicleta. Pedía *x* pesos por ella pero rebajó el precio a la mitad. Escribe una expresión que represente el nuevo precio.

6. ***Zapatos.*** Alejandro va a comprar zapatos. La tienda tiene una venta al dos por uno, es decir: que al comprar un par se regala otro. Escribe una expresión que represente el número de pares de zapatos que obtendrá Alejandro si compra *y* pares.



7. ***Jirafa en crecimiento.*** En un año, la estatura, *h*, de una jirafa se incrementa en 0.8 m. Escribe una expresión que represente su estatura actual.

8. ***Lectura veloz.*** Daniel solía leer *p* palabras por minuto. Después de tomar un curso de lectura veloz, su velocidad aumentó a 60 palabras por minuto. Escribe una expresión que represente su velocidad nueva de lectura.

9. ***Precio de acciones.*** En 2002, el precio *p de* una empresa cayó 8%. Escribe una expresión para el precio después de que bajó.

10. ***Reciclar llantas.*** Cada año, en México se desechan *t* llantas. Sólo se recicla el 7% de todas. Escribe una expresión que represente el número de las llantas recicladas.

11. ***Vitaminas.*** En una cápsula de vitaminas Solaray, el número de miligramos de riboflavina es 5 menos que una décima del número de miligramos de vitamina C. Si *n* representa el número de miligramos de ésta, escribe una expresión para el número de miligramos de riboflavina.

12. ***Población.*** En 2001, China tenía la población más grande, mientras que India tenía la segunda más grande. Si *p* representa la población de India, en millones, escribe una expresión para la población de China si ésta tenía 40 millones más que 1.2 veces la población de India.

13. ***Ascenso.*** Supón que el último año José Rivera tenía un salario de *m* pesos. Este año recibió un ascenso y su nuevo salario es de $16,000 más ocho novenos del anterior. Escribe una expresión que represente su salario nuevo.

14. ***Montaña rusa.*** En una bajada específica de cierta montaña rusa en los Universal Studios, la velocidad de los carros que descienden es 12 millas por hora mayor que 8 veces la velocidad, *s*, de los que suben por otro lugar. Escribe una expresión que represente la velocidad de los carros que bajan por la pendiente específica.

15. ***Renta de camioneta.*** José Antonio rentó una camioneta para hacer un viaje. Hizo un pago diario de \$45 y una tarifa por distancia de 40 centavos por kilómetros. Escribe una expresión que represente su costo total, si viaja x kilómetros en un día.

16. ***Incremento de la población.*** La ciudad de Morelos tiene una población de 4000. Si ésta se incrementa en 300 personas por año, plantea una expresión que represente la población en n años.

17. ***Dinero.*** Laura vio que tenía x monedas de 25 centavos en su bolsa. Escribe una expresión que represente la cantidad de dinero en centavos.

18. ***Estatura.*** La estatura de Sandra es de x metros y y centímetros. Escribe una expresión que represente su estatura en centímetros.

19. ***Peso.*** El peso de Javier es de x kilos y y gramos. Plantea una expresión que represente su peso en gramos.

20. ***Recién nacido.*** El bebé recién nacido de Claudia tiene una edad de m minutos y s segundos. Escribe una expresión que represente su edad en segundos.

21. ***Equipo de ventas.*** El equipo de ventas de el Cafetal se incrementó en 4% de 2001 a 2002. Si n representa el número de personas en dicho equipo en 2001, escribe una expresión para el número en 2002.

22. ***Reactores nucleares.*** El número de reactores nucleares en Europa Occidental es de 137 menos que 2.4 veces el número en los Estados Unidos. Si r representa el número en los Estados Unidos, escribe una expresión para el número en Europa Occidental.

23. ***Manatíes.*** Un manatí en particular (también se los conoce como *vaca marina*) perdió el 2% de su peso en los meses de invierno. Si su peso original era de p kilogramos, escribe una expresión para su nuevo peso.

24. ***Impuestos.*** Por medio de una planeación fiscal cuidadosa, Roberto pudo reducir sus impuestos federales de 2002 a 2003 en un 18%. Si sus impuestos de 2002 fueron por t pesos, escribe una expresión que represente los de 2003.

25. ***Conteo de calorías.*** Cada rebanada de pan blanco tiene 110 calorías, y cada cucharadita de mermelada de fresa tiene 80. Si Camila se prepara un sándwich (2 rebanadas de pan) de mermelada de fresa y utiliza x cucharaditas de ésta, escribe una expresión que represente el número de calorías que contiene el sándwich.

26. ***Crecimiento de Las Vegas.*** De acuerdo con la U.S. Census Bureau, Las Vegas, Nevada, tuvo el crecimiento más grande de población entre 1990 y 2000 que cualquier otra de las ciudades principales de los Estados Unidos. En 2000, la población de Las Vegas fue de 38,156 menos que el doble de la que tenía en 1990. Si p representa la que había en 1990, escribe una expresión para la que Las Vegas tenía en 2000.

27. ***Colesterol.*** Un huevo promedio de pollo contiene cerca de 275 miligramos (mg) de colesterol, y una onza de pollo, 25 mg. Escribe una expresión que represente la cantidad de colesterol en x huevos de pollo y y onzas de pollo.

28. ***Lectura de etiquetas de alimentos.*** De acuerdo con los lineamientos de Estados Unidos, cada gramo de carbohidratos contiene 4 calorías, cada gramo de proteína tiene 4 calorías, y en cada gramo de grasa hay 9 calorías. Escribe una expresión que represente el número de calorías en un producto que contiene x gramos de carbohidratos, y gramos de proteína y z gramos de grasa.

Escribe cada expresión matemática en forma de enunciado. (Hay muchas respuestas correctas).

29. $x - 3$

30. $4x + 1$

31. $6x - 7$

32. $4x - 2$

33. $2 - 3x$

34. $2(x - 1)$

35. $x + 5$

36. $3x - 4$

37. $7x - 6$

38. $5 - x$

39. $4 + 6x$

40. $3(x + 2)$

En los ejercicios 41 a 68 damos una variable que representa una cantidad. Expresa la cantidad que se especifica en términos de la variable que damos. Por ejemplo, para el enunciado "Juan Carlos tiene 2 años más que el triple de la edad de René", entonces la edad de Juan Carlos se representaría como $3d + 2$. *Con el enunciado "El salario de Óscar en 2003 fue 8% mayor que el de 2002, s", entonces el salario de Óscar en 2003 se representaría como* $s + 0.08s$.

41. ***Edad.*** Ana tiene 5 años más que la edad de Diego, d. Escribe una expresión para la edad de Ana.

42. ***Edad.*** El hijo de Román tiene un tercio de la edad de Gildardo. Escribe una expresión para la edad del hijo.

43. ***Carrera docente.*** Araceli ha practicado la docencia durante 6 años menos que Hugo, h. Escribe una expresión para el tiempo que Araceli ha sido maestra.

44. ***Dinero.*** Se dividen cien pesos entre Pablo y Luis, *l*. Escribe una expresión para la cantidad de Pablo.

45. ***Tierra.*** En dos camiones colocamos un total de seiscientos kilogramos de tierra. Si en uno de ellos ponemos *a* kilogramos, escribe una expresión para la cantidad de tierra que colocamos en los dos vehículos.

46. ***Compra de televisión.*** Una televisión marca Sony cuesta 1.4 veces lo que una RCA, *r*. Escribe una expresión para el costo de la Sony.

47. ***Utilidades.*** Mónica y Julia comparten las utilidades, en porcentaje, de una tienda de juguetes. Escribe una expresión para la cantidad que recibe Julia si lo que recibe Mónica es *m*.

48. ***Calorías.*** Las calorías en una porción de mezcla de nueces es de 280 calorías menos que el doble del número de calorías de una castaña, *c*. Escribe una expresión para el número de calorías en una porción de mezcla de nueces.

49. ***Número de empleados.*** En Los Altos, el número de empleadas mujeres es de 6 menos que dos tercios de los hombres, *m*. Escribe una expresión para el número de mujeres empleadas.

50. ***Superficie del territorio.*** El estado con mayor superficie de los Estados Unidos es Alaska, y el que tiene menos es Rhode Island. El área de Alaska es 462 millas cuadradas más que 479 veces la de Rhode Island, *r*. Escribe una expresión para el área de Alaska.

51. ***Jonrones.*** En el béisbol profesional, el líder de todos los tiempos en cuanto a jonrones es Hank Aaron, y Babe Ruth es el segundo. Hank Aaron hizo 673 jonrones menos que el doble de los de Babe Ruth, *r*. Escribe una expresión para el número de jonrones que anotó Hank Aaron.

52. ***Esperanza de vida.*** En 2001, el país con la esperanza de vida más elevada era Japón, y el que tenía la más baja era Botswana. La esperanza de vida promedio en Japón era de 9.3 años más que el doble de Botswana, *b*. Escribe una expresión para la esperanza de vida promedio en Japón. (Fuente: Naciones Unidas).

53. ***Museo saturado.*** En 2000, el número de visitantes al National Air and Space Museum (que forma parte del Smithsonian) fue de 2.7 millones menos que el doble del número que acudió al Louvre, en París, *p*. Escribe una expresión para el número de visitantes que tuvo en 2000 el Air and Space Museum. (Fuente: *USA Today*).

54. ***Boleto para el cine.*** En abril de 2001, el precio promedio de un boleto para el cine en los Estados Unidos era de 70 centavos menos que 30 veces el precio promedio en 1928, *p*. Escribe una expresión para el precio, en centavos, de un boleto para el cine en abril de 2001. (Fuente: *Money Magazine*).

55. ***Viaje al trabajo.*** El tiempo promedio de viaje al trabajo en el estado de Nueva York (el promedio más elevado) es de 15 minutos menos que el triple del tiempo del viaje promedio en Dakota del Norte (el promedio más bajo), *n*. Escribe una expresión para el tiempo promedio de viaje rumbo al trabajo en el estado de Nueva York. (Fuente: *USA Today*).

56. ***Espectáculos en Broadway.*** Al 2 de septiembre de 2001, la obra que había permanecido más tiempo en cartelera en Broadway era *Cats*, y en segundo lugar *A Chorus Line*. Esta última tuvo 16,318 menos representaciones que el triple del número que tuvo *Cats*, c. Escribe una expresión para el número de representaciones que tuvo *A Chorus Line*.

57. ***Mediana del ingreso.*** De acuerdo con la U.S. Census Bureau, en el año 2000, Nueva Jersey fue el estado con la mediana del ingreso doméstico más elevada. La mediana en Estados Unidos fue de $67,109 menos que el doble de la de Nueva Jersey, n. Escribe una expresión para el promedio (mediana) de Estados Unidos.

58. ***Precio de acciones.*** El precio de las acciones de Enron en enero de 2002 fue de $0.60 menos que $\frac{1}{130}$ veces su precio en enero de 2001, p. Escribe una expresión para el precio de las acciones de dicha empresa en enero de 2002.

59. ***Incremento de las ventas.*** Jaime es representante de una compañía de suministros médicos. Sus ventas de 2003 aumentaron 20% sobre las de 2002, s. Escriba una expresión para las ventas de 2003.

60. ***Consumo de electricidad.*** El consumo de electricidad de Jorge en 2003, disminuyó 12% respecto del que tuvo en 2002, e. Escriba una expresión para el consumo de 2003.

61. ***Aumento salarial.*** Sara, ingeniera, tuvo un aumento de salario de 15% sobre el del año anterior, s. Plantea una expresión para su salario de este año.

62. ***Golf femenil.*** Karrie Webb fue la jugadora de golf femenil que más dinero ganó tanto en 1999 como en 2000. Sus ingresos se incrementaron alrededor de 18% de 1999 a 2001. Si w representa los ingresos de Karrie Webb, escribe una expresión para éstos en 2000.

63. ***Tienda de pizzas.*** El número de clientes de Pizzas Pablo's disminuyó 12% de septiembre a octubre. Si f representa el número de clientes en septiembre, escribe una expresión para el número de ellos en octubre.

64. ***Casos de gripe.*** El número de casos de gripe en Guadalajara disminuyó 2% en relación con el año anterior. Si f representa el número de casos de gripa en dicha población durante el año anterior, escribe una expresión para el número de casos en este año.

65. ***Costo de un carro.*** El costo de un auto nuevo que se adquiera en Tuxtla Gutierrez incluye un impuesto de 7% sobre la venta. Si c representa el costo del carro antes de impuestos, escribe una expresión para el costo total, que incluya el impuesto.

66. ***Venta de camisetas.*** En una venta de remate con 25% de descuento en todos los artículos, Jorge compró una camiseta nueva. Si c representa el costo anterior a la venta, plantea una expresión para el precio de venta de la camiseta.

67. ***Contaminación.*** El nivel de contaminación en Detroit disminuyó en 50%. Si *p* representa el nivel que había antes de la disminución, escribe una expresión para el nuevo nivel.

68. ***Calificaciones.*** El número de estudiantes que obtuvieron una calificación de A en este curso, se incrementó en 100%. Si *n* representa el número de los que sacaron A antes del incremento, escribe una expresión para el número de estudiantes que ahora lograron una A.

Lee con cuidado cada uno de los ejercicios 69 a 86. Después selecciona una letra que represente una de las cantidades y enuncie con exactitud lo que la letra (o variable) represente. Después escribe una ecuación para representar el problema. Por ejemplo, si se dice que "La edad de Rubén es el doble de la de Enrique, y la suma de ambas es 20", quizá se haga que g *represente la edad de Enrique, por lo que la de Rubén sería* 2g. *Como la suma de las dos edades es 20, la ecuación que buscamos es* 2g + g = *20. Como pudimos utilizar letras diferentes para representar la variable, es posible que haya otras respuestas. Por ejemplo,* 2a + a = *20 también sería aceptable si empleamos la letra* a *para representar la edad de Enrique.*

69. ***Dos números.*** Un número es el cuádruplo de otro. La suma de los dos números es 20.

70. ***Edad.*** María tiene 6 años más que Daniela. La suma de sus edades es 48.

71. ***Enteros consecutivos.*** La suma de dos enteros consecutivos es 41.

72. ***Enteros pares.*** El producto de dos enteros pares consecutivos es 728.

73. ***Números.*** El doble de un número, disminuido en 8 es 12.

74. ***Enteros consecutivos.*** Para dos enteros consecutivos, la suma del más pequeño y el doble del más grande es 29.

75. ***Números.*** Un quinto de la suma de un número y 10 es 150.

76. ***Trote.*** Miguel Ángel corre 5 veces más distancia que Josefina. La distancia total que recorren los dos es de 13 kilómetros.

77. ***Amtrak.*** Un tren de Amtrak recorre 4 millas menos que el doble de la distancia que viaja otro de Southern Pacific. La distancia total que recorren ambos es de 890 millas.

78. ***Viaje en carreta.*** En un viaje en carreta, el número de muchachas fue 8 menos que el doble del número de chicos. El total de todos los que iban en la carreta fue de 24.

79. ***Carro nuevo.*** Carlota Díaz compró un carro nuevo. El costo del vehículo más el impuesto de 7% sobre la venta fue de $32,600.

80. ***Chamarra deportiva.*** Luis Ángel compró una chamarra deportiva con un 25% de descuento. Pagó por ella $195.

81. ***Costo de la comida.*** Bertha comió en un restaurante. El costo de la comida más la propina de 15% fue de $42.50.

82. ***Cintas de video.*** Luisa compró una reproductora de videos en \$208; el precio estaba rebajado un 10%.

83. ***Salario.*** En 2000, el área metropolitana con el salario promedio anual más elevado fue San José, Califomia, y el segundo lugar era San Francisco. El salario promedio en San José fue alrededor de 1.28 veces el promedio en San Francisco. La diferencia entre los promedios de las dos ciudades fue de \$16,762. (Fuente: Bureau of Labor Statistics).

84. ***Esperaza de vida.*** Las mujeres vivieron mucho más en 2000 de lo que vivían en 1900. La esperanza de vida para las mujeres de Estados Unidos, en 2000, fue de 16.9 años menos que el doble de su esperanza de vida en 1900. La diferencia en ambas esperanzas fue de 31.4 años. (Fuente: U.S. Census Bureau.)

85. ***Cirugía con láser.*** El número de cirugías oftálmicas con láser fue de 0.55 millones más en 2000 que en 1999. La suma total de ellas en 1999 y 2000 fue de 2.45 millones. (Fuente: *U.S. News and World Report.*)

86. ***Ferrocarril.*** En una vía férrea estrecha, la distancia entre los rieles es alrededor de 64% de la distancia entre los de una vía estándar. La diferencia en las distancias entre los rieles de una vía estándar y otra estrecha es de casi 1.67 pies.

En los ejercicios 87 a 98, expresa cada ecuación en forma de enunciado. (Existen muchas respuestas correctas.)

87. $x + 2 = 5$

88. $x - 5 = 2x$

89. $3x - 1 = 2x + 4$

90. $x - 3 = 2x + 3$

91. $4(x - 1) = 6$

92. $4x + 6 = 2(x - 3)$

93. $5x + 6 = 6x - 1$

94. $x - 3 = 2(x + 1)$

95. $x + (x + 4) = 8$

96. $x + (2x + 1) = 5$

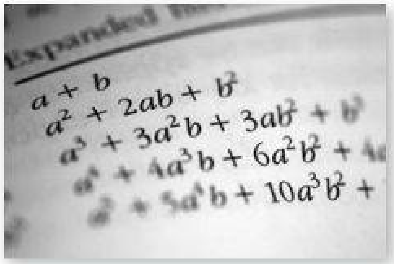
97. $2x + (x + 3) = 5$

98. $2x - (x + 3) = 6$

99. Explica por qué el costo de la compra de x artículos a 6 pesos cada uno está representado por $6x$.

100. Explica por qué el costo de la compra de x artículos a y pesos cada uno está representado como xy.

Multiplicación de monomios



Para multiplicar dos monomios es necesario que utilicemos las leyes de los exponentes. Recuerda que si tienes dos potencias de la misma base los exponentes se suman, es decir:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Por ejemplo, si deseamos multiplicar x^4 por x^6 es necesario considerar que el exponente nos indica las veces que se requiere multiplicar la literal, en este caso x; por lo tanto, la multiplicación se puede efectuar de la siguiente forma:

$$x^4 \cdot x^6 = x^4 \cdot x^6$$

Las potencias se expresan como:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x \text{ y } x^6 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

Entonces, podemos escribir la multiplicación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^4 \cdot x^6 &= x^4 \cdot x^6 \\ &= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \\ &= x^{10} \end{aligned}$$

De manera sintética, es posible expresar la multiplicación haciendo uso de la ley de la multiplicación de potencias de la misma base como sigue:

$$x^4 \cdot x^6 = x^{4+6} = x^{10}$$

La ley de la multiplicación de potencias de las mismas bases funciona debido a que, en general, es posible expresar las potencias de forma ordenada y hacer el mismo desarrollo que vimos en el ejemplo anterior. Es decir:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^n$$

Pero como

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por lo que es posible escribir la multiplicación de potencias de la misma base como

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

de manera que

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ veces}}$$

Entonces podemos escribir la multiplicación de manera simplificada como:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 1

Multiplicar $5x^4$ por $6x^8$.

Es posible realizar la operación de la siguiente manera:

$5x^4 \cdot 6x^8 = 5x^4 \cdot 6x^8$	Por la propiedad simétrica de la igualdad.
$= 5 \cdot x^4 \cdot 6 \cdot x^8$	Un monomio es una multiplicación.
$= 5 \cdot 6 \cdot x^4 \cdot x^8$	Por la propiedad conmutativa.
$= (5 \cdot 6) \cdot (x^4 \cdot x^8)$	Por la propiedad asociativa de la multiplicación.
$= 30 \cdot x^{4+8}$	Ley de los exponentes para la multiplicación.
$= 30x^{12}$	

El proceso algebraico, de manera simplificada, si queremos multiplicar $5x^4$ por $6x^8$ equivale a multiplicar los coeficiente y sumamos los exponentes.

$$5x^4 \cdot 6x^8 = 30x^{12}$$

Ejemplo 2

Multiplicar $\frac{5}{6}m^5$ por $\frac{4}{3}m^4$.

Nuevamente es posible efectuar la operación multiplicando los coeficientes y sumando los exponentes.

$$\left(\frac{5}{6}m^5\right)\left(\frac{4}{3}m^4\right) = \frac{20}{18}m^9$$
$$= \frac{10}{9}m^9$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Cuando deseamos multiplicar un monomio por un polinomio, utilizamos la propiedad distributiva, es decir, a cada elemento del polinomio lo multiplicamos por el monomio.

Ejemplo 1

Multiplicar $5x^2$ por $6x^3-4x^2-8x+10$.

Multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 5x^2(6x^3-4x^2-8x+10) &= 5x^2\cdot 6x^3-5x^2\cdot 4x^2-5x^2\cdot 8x+5x^2\cdot 10 \\ &= 30x^5-20x^4-40x^3+50x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Multiplicar $-\frac{5}{6}x^4$ por $\frac{3}{5}x^3-8x^2-9x+\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}x^4\left(\frac{3}{5}x^3-8x^2-9x+\frac{3}{4}\right) &= \left(-\frac{5}{6}x^4\right)\frac{3}{5}x^3-\left(-\frac{5}{6}x^4\right)\frac{8}{1}x^2-\left(-\frac{5}{6}x^4\right)\frac{9}{1}x+\left(-\frac{5}{6}x^4\right)\frac{3}{4} \\ &= -\frac{15}{30}x^7+\frac{40}{6}x^6+\frac{45}{6}x^5-\frac{15}{24}x^4 \\ &= -\frac{1}{2}x^7+\frac{20}{3}x^6+\frac{15}{2}x^5-\frac{5}{8}x^4 \end{aligned}$$

Multiplicación de un polinomio por otro polinomio

Para multiplicar un polinomio por otro polinomio es necesario que cada uno de los términos de uno de los polinomios se multiplique por los términos del otro. Lo anterior es posible debido a la propiedad distributiva; por último, si existieran términos semejantes, habrá que reducirlos.

Ejemplo 1

Multiplicar $5x^2-7x+8$ por $6x-5$. Se expresa como:

$$(5x^2-7x+8)(6x-5)$$

En este ejemplo es necesario que realicemos tres pasos para obtener el producto; primero se requiere que multipliquemos $6x$ por cada uno de los términos del primer polinomio; a continuación haremos lo mismo con -5 y por último reduciremos los términos semejantes.

1. $(5x^2-7x+8)(6x-5)=5x^2\cdot 6x-7x\cdot 6x+8\cdot 6x+\ldots$

2. $$\begin{aligned}(5x^2-7x+8)(6x-5)&=5x^2\cdot 6x-7x\cdot 6x+8\cdot 6x+5x^2(-5)-7x(-5)+8(-5)\\&=30x^3-42x^2+48x-25x^2+35x-40\end{aligned}$$

3. $(5x^2-7x+8)(6x-5)=30x^3-67x^2+83x-40$

Otra forma de resolver la operación es utilizando un arreglo con los polinomios que vamos a multiplicar; en el ejemplo que estamos resolviendo se vería así:

$$\begin{array}{r}5x^2-7x+8\\ \underline{6x-5}\end{array}$$

Se procede de la misma forma que en el proceso descrito anteriormente, primero se multiplica $6x$ por cada uno de los elementos del primer polinomio, a continuación se deja un espacio de manera que los términos que son semejantes se puedan colocar en la misma columna, por último se reducen para simplificar la expresión.

$$\begin{array}{l}5x^2-7x+8\\ \underline{\qquad\quad 6x-5}\\ 30x^3-42x^2+48x\\ \underline{\qquad\quad -25x^2+35x-40}\\ 30x^3-67x^2+83x-40\end{array}$$

Ejemplo 2

Multiplicar $3x^3-4x^2+5x+4$ por $2x^3+6x-9$.

Un método para encontrar el producto, requiere de completar el segundo polinomio, agregando el término faltante con coeficiente cero.

$$2x^3+6x-9=2x^3+0x^2+6x-9$$

Ahora procederemos a realizar el mismo proceso que en el ejemplo anterior; multiplicamos cada uno de los términos de un polinomio por los términos del otro y reducimos los términos semejantes.

$$
\begin{array}{r}
3x^3-4x^2+5x+4 \\
\underline{2x^3+0x^2+6x-9} \\
6x^6-8x^5+10x^4+\ \ 8x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
0x^5+\ 0x^4+\ \ 0x^3+\ \ 0x^2 \qquad\qquad \\
18x^4-24x^3+30x^2+24x \qquad \\
\underline{-27x^3+36x^2-45x-36} \\
6x^6-8x^5+28x^4-43x^3+66x^2-21x-36
\end{array}
$$

Sin embargo, debe notarse que con un poco de cuidado, se puede prescindir del término $0x^2$, para obtener el mismo producto.

LO QUE APRENDÍ

I. Realiza los siguientes productos:

1. $(3x)(6x^2)$
2. $(7m^5)(5m^3)$
3. $(-7x^3)(5x^2)$
4. $(4n^4)(-5n^6)$
5. $\left(\frac{3}{7}k^8\right)\left(9k^4\right)$
6. $\left(6x^2\right)\left(\frac{5}{2}x^8\right)$
7. $\left(\frac{4}{5}p\right)\left(\frac{1}{6}p^5\right)$
8. $5x^3\left(6x^2-9x+2\right)$
9. $8k(4k^3-3k^2+4k-3)$
10. $4m^3(3m^4+8m^3-6m-7)$

Productos notables

Algunas multiplicaciones entre polinomios pueden efectuarse a través de procesos simplificados debido a la naturaleza de los polinomios involucrados. Éstos se llaman productos notables y los estudiaremos a continuación.

Augustus de Morgan (1806-1871) destaca que el simbolismo fácil de manejar acerca el álgebra al pueblo.

Binomio al cuadrado

Modelo algebraico de un binomio al cuadrado.

El binomio al cuadrado tiene la forma $(a+b)^2$ o $(a-b)^2$ en los dos casos, se implica que lo que se encuentra en el interior del paréntesis debe ser multiplicado por sí mismo, de manera que podemos expresar y realizar el producto de la siguiente forma:

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{\quad a+b} \\ a^2 + \quad ab \\ \underline{\quad + \quad ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

En el segundo caso, podemos expresar la potencia y el binomio como:

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{\quad a-b} \\ a^2 - \quad ab \\ \underline{\quad - \quad ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

Binomio al cuadrado $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

- Si el binomio es una suma, entonces el producto es el cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término.

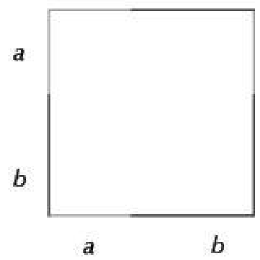
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Si el binomio es una diferencia, entonces el producto es el cuadrado del primer término menos el doble producto del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

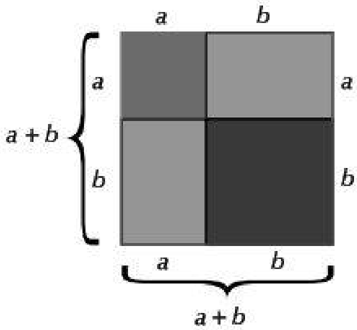
Modelo geométrico de un binomio al cuadrado.

Deseamos obtener el área de un cuadrado en el que su lado se encuentra formado por dos segmentos, *a* y *b*, de manera que se puede expresar cada lado como $l = a + b$.



Se clasifica el desarrollo del simbolismo en álgebra en 3 etapas. La primera es el álgebra retórica, utilizada en el antiguo Egipto.

Ahora dividiremos el cuadrado de manera que sea posible observar las partes que constituyen el área que deseamos obtener.



Es necesario que consideremos dos cuestiones relacionadas con el área del cuadrado que buscamos; primeramente, que se puede obtener a partir de la expresión $A = l^2$ y que el área es posible expresarla como la suma de cuatro áreas que se encuentran en su interior, dos cuadrados y dos rectángulos iguales.

$$A = l^2$$
$$A_1 + A_2 + A_2 + A_3 = (a + b)^2$$

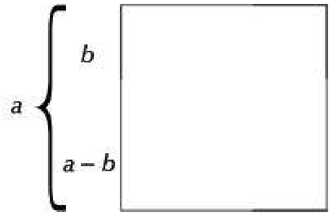
Si obtenemos el área de cada una de las figuras que se encuentran en el interior del cuadrado, llegamos a la expresión que representa un binomio al cuadrado.

$$a^2 + ab + ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El producto resultante de un binomio al cuadrado se llama *trinomio cuadrado perfecto*.

Ahora encontraremos la expresión de la diferencia de dos términos al cuadrado siguiendo el modelo geométrico; para ello utilizaremos un cuadrado que tiene como lado el segmento a; si le quitamos el segmento b, entonces lo que quedará es el segmento $a - b$.

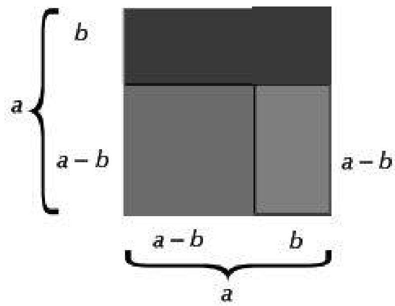
Luca Pacioli (1445-1514 o 1517). En su trabajo se observa una modificación importante en la simbología. Es considerada la segunda fase en el desarrollo del álgebra: "Álgebra sincopada".



Podemos obtener el área utilizando la fórmula del área de un cuadrado.

$$A_1 = l^2$$
$$A_1 = a^2$$

Ahora dividimos el cuadrado para ver cómo se encuentra constituido.



El área que deseamos obtener es la que aparece en la figura en color gris medio, por lo que habrá que restar al área del cuadrado mayor las áreas de los rectángulos, es decir:

$$A = a^2 - ab - b(a - b)$$
$$A = a^2 - ab - ab + b^2$$
$$A = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1

Efectuar $(3x + 4)^2$.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(3x + 4)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(4) + (4)^2$$
$$= 9x^2 + 24x + 16$$

En Francia, François Viète desarrolla una simbología muy sencilla, y marca así la llegada del álgebra simbólica.

Ejemplo 2

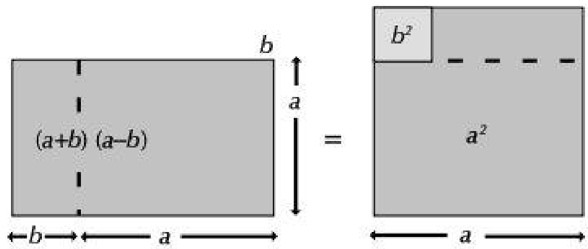
Realizar $(4x-5)^2$.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(4x-5)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(5) + (5)^2$$
$$= 16x^2 - 40x + 25$$

Binomios conjugados

Los binomios tienen la forma $(a+b)(a-b)$ para determinar la forma simplificada de realizar este producto podemos efectuar el producto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rr} a+b & \\ a-b & \\ \hline a^2+ab & \\ -ab & -b^2 \\ \hline a^2 & -b^2 \end{array}$$



Por lo que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

El resultado del producto de dos binomios conjugados se llama *diferencia de cuadrados*.

Ejemplo

Determinar $(5x-9)(5x+9)$.

En vista de que la multiplicación tiene la forma de los binomios conjugados, entonces podemos ocupar la forma simplificada de realizar el producto.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(5x-9)(5x+9) = (5x)^2 - (9)^2$$
$$= 25x^2 - 81$$

Nota: Es importante que consideres que existe una diferencia en cuanto a la forma en la que opera: -9^2 y $(-9)^2$. En el primer caso, $-9^2 = -(9 \cdot 9) = -81$ y en el segundo, $(-9)^2 = (-9)(-9) = 81$.

LO QUE APRENDÍ

I. Realiza los siguientes productos.

1. $(4x+7)^2$
2. $(5x+2)^2$
3. $(6x+7)^2$
4. $(2x+11)^2$
5. $\left(\frac{5}{6}m+8\right)^2$
6. $(3m-8)^2$
7. $(7m-1)^2$
8. $\left(5k-\frac{1}{2}\right)^2$
9. $\left(\frac{1}{8}p-4\right)^2$
10. $(6x-9)(6x+9)$

Factorización

La factorización es un proceso mediante el cual es posible escribir un número o una expresión como una multiplicación.

Ejemplo

Factorizar 108.

Cuando factorizamos números, preferimos que los factores en los que descomponemos el número sean números primos.

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Cuando vamos a factorizar expresiones algebraicas, es necesario que consideremos la forma y los elementos que tienen éstas, para, a partir de ello, poner en marcha una técnica para factorizar.

Factor común

Las expresiones algebraicas que tienen factor común pueden tener alguna de las siguientes características, o ambas; sus términos son divisibles en un número común o cuentan con una letra presente en cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplo 1

Factorizar $18x^2 - 45x + 27$.

El polinomio que queremos factorizar tiene como coeficientes 18, –45 y 27; estos números cuentan con el máximo común divisor 9.

$$\begin{array}{rrr|l} 18 & -45 & 27 & 2 \\ 9 & -45 & 27 & 3 \\ 3 & -15 & 9 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & \end{array}$$

Estos números dividen a los tres números al mismo tiempo

Máximo común divisor: $3 \times 3 = 9$

Para factorizar el polinomio, colocaremos el 9 a la izquierda de un paréntesis.

$$18x^2 - 45x + 27 = 9(\qquad\qquad)$$

A continuación, dentro del paréntesis colocaremos números y letras que, al ser multiplicadas por 9, den como resultado el polinomio que deseamos factorizar.

$$18x^2 - 45x + 27 = 9(2x^2 - 5x + 3)$$

Ejemplo 2

Factorizar $6x^4 - 12x^5 + 21x^3$.

Para factorizar esta expresión, consideraremos dos cosas: primero veremos que el máximo común divisor es el 3 y que en cada término se encuentra presente x. Para factorizar, colocaremos a la izquierda del paréntesis $3x^3$, ya que es la literal que tiene el menor exponente.

$$6x^4 - 12x^5 + 21x^3 = 3x^3\ (\qquad\qquad)$$

En el interior del paréntesis pondremos números y letras que, al ser multiplicados por $3x^3$, den como resultado el polinomio que estamos factorizando.

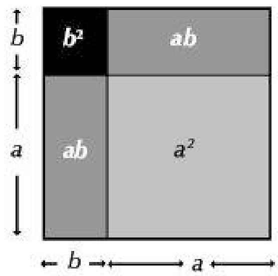
$$6x^4 - 12x^5 + 21x^3 = 3x^3\ (2x - 4x^2 + 7)$$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado tienen la forma $ax^2 + bx + c$ donde ax^2 recibe el nombre de término cuadrático, bx es el término lineal y c es el término independiente.

Decimos que un trinomio es cuadrado perfecto cuando sus literales y coeficientes se encuentran relacionados, de manera que el término lineal se obtiene al multiplicar por 2 el producto de las raíces cuadradas de los términos cuadrático e independiente.

Un ejemplo de un trinomio cuadrado perfecto es $4x^2 + 14x + 49$ para comprobarlo, determinamos cuáles son los elementos que lo integran y si cumplen con la relación enunciada.



$(a+b)^2$

$= a^2+b^2+ab+ab$
$= a^2+2\,ab+b^2$

$4x^2$ es el término cuadrático

$14x$ es el término lineal y

49 es el término independiente

$$14 = 2\sqrt{4x^2}\sqrt{49}$$
$$14 = 2(2x)(7)$$
$$14 = 14x$$

Otro ejemplo de un trinomio cuadrado perfecto es $25x^2 - 30x + 9$, ya que:

$25x^2$ es el término cuadrático

$-30x$ es el término lineal y

9 es el término independiente

$$30x = 2\sqrt{25x^2}\sqrt{9}$$
$$30x = 2(5x)(3)$$
$$30x = 30x$$

Observa que para comprobar si es un trinomio cuadrado perfecto, no es necesario que consideremos el signo del término lineal.

Los trinomios cuadrados perfectos provienen de binomios al cuadrado como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ para comprobarlo, realizaremos el proceso que enunciamos en la explicación anterior.

a^2 es el término cuadrático

$2ab$ es el término lineal

b^2 es el término independiente

$$2ab = 2\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}$$
$$2ab = 2(a)(b)$$
$$2ab = 2ab$$

Por ello es posible concluir que para factorizar un trinomio cuadrado perfecto sólo hay que expresarlo como un binomio al cuadrado, es decir,

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ejemplo 1

Factorizar $81m^2 - 18m + 1$.

Primeramente comprobaremos que el trinomio cuadrado sea perfecto.

Los griegos utilizaron una simbología que se ha clasificado como retórica y sincopada.

$81m^2$ es el término cuadrático
$-18m$ es el término lineal y
1 es el término independiente

$$18\,m = 2\sqrt{81m^2}\sqrt{1}$$
$$18\,m = 2(9\,m)(1)$$
$$18\,m = 18\,m$$

Para factorizar el trinomio sólo es necesario expresarlo como un binomio al cuadrado, para ello tomamos las raíces de los términos cuadrático e independiente; formaremos el binomio teniendo especial cuidado en el signo del término lineal, que determina si los términos se suman o se restan.

$$81m^2 - 18m + 1 = (9m - 1)^2$$

Ejemplo 2

Factorizar $9x^2 + 15x + 4$.

Primero comprobaremos si el trinomio cuadrado que nos han proporcionado es o no un trinomio cuadrado perfecto.

$9x^2$ es el término cuadrático
$15x$ es el término lineal y
4 es el término independiente

$$15 \neq 2\sqrt{9x^2}\sqrt{4}$$
$$15 \neq 2(3x)(2)$$
$$15 \neq 12x$$

Por lo tanto, el trinomio no es un cuadrado perfecto; para factorizarlo, es necesario utilizar otro tipo de técnica.

Diferencia de cuadrados

Las diferencias de cuadrados son binomios en los cuales sus términos se encuentran separados por el signo negativo, además de que los números o las expresiones algebraicas que las forman pueden expresarse como potencias elevadas al cuadrado.

Un ejemplo de una diferencia de cuadrados es $25x^2 - 16$ que es un binomio cuyos términos se encuentran separados por el signo menos, además de que:

$$25x^2 = (5x)^2$$
$$16 = (4)^2$$

Por ello la diferencia que analizamos se puede expresar como:

$$25x^2 - 16 = (5x)^2 - (4)^2$$

Las diferencias de cuadrados son productos de binomios conjugados. Lo anterior puede comprobarse a partir de la forma que éstos presentan.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Para factorizar una diferencia de cuadrados es necesario que se utilice la raíz cuadrada de cada uno de los términos y se arreglen en forma de binomios conjugados.

Ejemplo

Factorizar $36x^2 - 25$.

Primero comprobaremos que la expresión es una diferencia de cuadrados.

$$\sqrt{36x^2} = 6x$$
$$\sqrt{25} = 5$$
$$36x^2 - 25 = (6x)^2 - (5)^2$$

Ahora que sabemos que la expresión que queremos factorizar es una diferencia de cuadrados; utilizaremos la forma de binomios conjugados.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$36x^2 - 25 = (6x)^2 - (5)^2 = (6x - 5)(6x + 5)$$

Factorización combinada

Algunas expresiones algebraicas que son factorizables tienen, al mismo tiempo, dos formas de factorización involucradas.

Ejemplo 1

Factorizar $6x^2 - 24$.

El binomio que deseamos factorizar tiene como factor común al número 6.

$$6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4)$$

En la expresión resultante es posible factorizar utilizando diferencias de cuadrados.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 24 &= 6(x^2 - 4) \\ &= 6(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Factorizar $x^4 - 8x^2 + 16$.

El trinomio que deseamos factorizar es un trinomio perfecto, debido a que cumple con la propiedad que mencionamos en otra sección, pero sus términos no tienen los nombres que les dimos en ese momento.

$$\begin{aligned} 8x^2 &= 2\sqrt{x^4}\sqrt{16} \\ 8x^2 &= 2(x^2)(4) \\ 8x^2 &= 8x^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, es posible factorizar la expresión como un binomio al cuadrado.

$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2$$

La expresión que ha quedado en el interior del paréntesis es una diferencia de cuadrados, por lo que se puede factorizar como binomios conjugados.

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 + 16 &= (x^2 - 4)^2 \\ &= (x^2 - 4)(x^2 - 4) \\ &= \left[x^2 - (2)^2\right]\left[x^2 - (2)^2\right] \\ &= (x - 2)(x + 2)(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

LO QUE APRENDÍ

I. Clasifica las siguientes expresiones en polinomios que tienen un factor común, trinomios cuadrados perfectos y diferencias de cuadrados.

1. $k^2 - 10x + 25$
2. $x^2 - 36$
3. $m^2 + 6x + 9$
4. $16h^2 - 32h^3 + 12h^4$
5. $49n^2 - 81$
6. $36k^2 - 121$
7. $9m^2 + 30m + 25$
8. $18x^6 - 27x^5 + 45x^4$
9. $7x^2 - 14x - 49$
10. $s^2 - \frac{1}{9}$

II. Factoriza cada una de las expresiones de la sección anterior.

III. Factoriza las expresiones algebraicas que se muestran a continuación; en cada una de ellas se utiliza más de una forma de factorización de esta lección.

1. $8x^2 - 16x + 8$
2. $5k^2 - 80$
3. $4x^3 - 24x^2 + 36x$
4. $x^4 - 50x^2 + 625$
5. $x^4 - 81$
6. $6x^4 + 48x^3 + 96x^2$
7. $x^3 - 36x$
8. $x^5 - 8x^3 + 16x$

Factorización de trinomios

PRODUCTO

I. En parejas, analicen los siguientes diseños y contesten las preguntas que se indican. La cantidad anotada en cada parte de la figura representa su área.

1.

x	1	1
x	1	1
x	1	1

a) Escriban una expresión que represente el área de todo el rectángulo.

___

b) Escriban una expresión que represente la medida del largo.

___

c) Escriban una expresión que represente la medida del ancho.

___

d) Si el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la medida de su largo por su ancho, escribe la expresión que representa dicho producto en este caso.

___

e) Las expresiones que escribiste en los incisos *a*) y *d*), ¿son equivalentes?

___

¿Por qué?

___

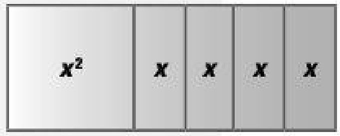
___

2.

a) Escriban una expresión que represente el área de todo el rectángulo.

b) Escriban una expresión que represente la medida del largo.

c) Escriban una expresión que represente la medida del ancho.



d) Si el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la medida de su largo por su ancho, escribe la expresión que representa dicho producto en este caso.

e) Las expresiones que escribiste en los incisos *a*) y *d*) ¿son equivalentes?

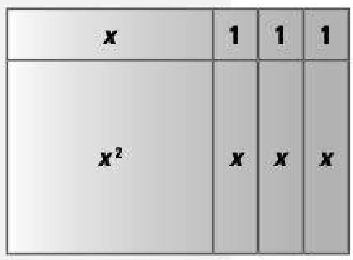
¿Por qué?

3.

a) Escriban una expresión que represente el área de todo el rectángulo.

b) Escriban una expresión que represente la medida del largo.

c) Escriban una expresión que represente la medida del ancho.

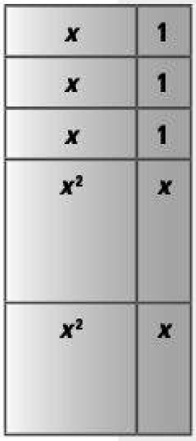


d) Si el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la medida de su largo por su ancho, escribe la expresión que representa dicho producto en este caso.

e) Las expresiones que escribiste en los incisos *a*) y *d*), ¿son equivalentes?

¿Por qué?

4.



a) Escriban una expresión que represente el área de todo el rectángulo.

____

b) Escriban una expresión que represente la medida del largo.

____

c) Escriban una expresión que represente la medida del ancho.

____

d) Si el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la medida de su largo por su ancho, escribe la expresión que representa dicho producto en este caso.

____

e) Las expresiones que escribiste en los incisos *a*) y *d*), ¿son equivalentes?

____

¿Por qué?

____

____

____

II. Reunidos en grupos de tres integrantes, realicen lo siguiente:

1. Diseñen un modelo de rectángulo, como los anteriores, para representar las siguientes expresiones algebraicas:

a) $2x^2 + 4x$

b) $x^2 + 7x + 12$

c) $6x^2 + 17x + 12$

Los babilónicos utilizaban álgebra alrededor de 1810 antes de Cristo. En la imagen se representa a Hammurabi, rey babilónico.

Factorización

La factorización es un proceso que consiste en, dada una expresión algebraica (producto), encontrar los factores que la producen.

En el bloque anterior exploramos algunas formas de factorización; a continuación se expondrán otros casos de este tipo de transformaciones algebraicas.

Factorización por agrupación

Este proceso consiste en agrupar los términos que tengan al menos un factor común; éstos se factorizan y se repite el proceso.

Ejemplo 1

Factorizar $ax + ay + bx + by$ en términos de x y y.

$ax + bx + ay + by$	Agrupación de los términos con factor común.
$x(a + b) + y(a + b)$	Factorizamos aquellos términos que tienen un factor común. Como observamos, quedan dos términos con un factor común $(a + b)$, los cuales volvemos a factorizar.
$(a + b)(x + y)$	Esta expresión es la factorización del polinomio.

Ejemplo 2

Factorizar $2x^2 + 8y - 4xy - 4x$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 8y - 4xy - 4x &= 2x^2 - 4x + 8y - 4xy \\ &= 2x(x - 2) - 4y(x - 2) \\ &= (2x - 4y)(x - 2) \end{aligned}$$

Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, cuando $a = 1$

Consideremos el producto de dos binomios $(x + m)(x + n)$.

$$\begin{aligned} (x + m)(x + n) &= x^2 + mx + nx + mn \\ &= x^2 + (m + n)x + mn \end{aligned}$$

Hasta aquí tenemos el producto de los binomios, ahora podemos sustituir las literales de la siguiente forma:

$$b = m + n$$
$$c = mn$$
$$(x + m)(x + n) = x^2 + bx + c$$

En la imagen, solución griega a ecuaciones de segundo grado. Elementos de Euclides.

En seguida veremos lo explicado de manera inversa; podemos decir que es posible factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, de la siguiente manera:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

siempre y cuando

$$b = m + n$$
$$c = mn$$

Ejemplo 1

Factorizar $x^2 - x - 42$ de donde se puede considerar que $c = -42$ y $b = -1$.

Ahora, debemos encontrar dos números que multiplicados den como producto –42; los cuales pueden ser:

- –6 y 7
- 6 y –7
- 14 y –3
- –14 y 3
- 21 y –2
- –21 y 2
- 41 y –1
- –42 y 1

Ahora bien, de todas estas posibilidades, la única pareja que sumados dan –1, son 6 y –7.

Entonces: $x^2 - x - 42 = (x + 6)\ (x - 7)$.

Comprobación
Para comprobar el resultado, es necesario que multipliquemos los factores; si hemos factorizado correctamente la expresión, el producto debería ser el trinomio inicial.

$$
\begin{aligned}
(x + 6)(x - 7) &= x^2 + 6x - 7x - 42 \\
&= x^2 + 6x - 7x - 42 \\
&= x^2 - x - 42
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2

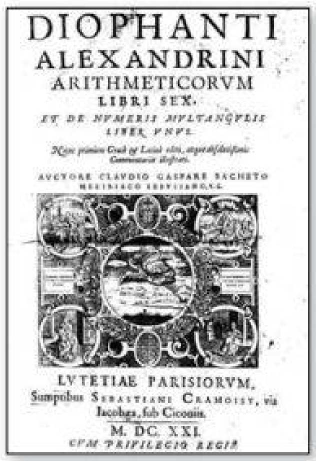
Factorizar $x^2 + 12x + 35$.

Debemos encontrar dos números que, multiplicados, den 35; éstos pueden ser:

- 1 y 35
- –1 y –35
- 7 y 5
- –7 y –5

en caso de ser números enteros, pero sumados deben dar 12. De esta manera, $(1) + (35) = 36$, $(-1) + (-35) = -36$, $(5) + (7) = 12$ y $(-7) + (-5) = -12$. Luego, los números son 5 y 7.

Entonces: $x^2 + 12x + 35 = (x + 5)\ (x + 7)$.



Portada de la obra de Diofanto, considerado padre del álgebra.

Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, cuando $a \neq 1$

Para factorizar $ax^2 + bx + c$, consideraremos una expresión distinta de ella; para facilitar el proceso, multiplicaremos por a para obtener:

$$a(ax^2 + bx + c) = a^2x^2 + ab + ac$$

La expresión que ahora tenemos es a veces mayor que el polinomio que pretendemos factorizar. Podemos representar el producto que acabamos de obtener de la siguiente forma:

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = (ax)^2 + b(ax) + q$$

Observa que el polinomio que tenemos es de la forma del polinomio que factorizamos en el apartado anterior, por lo que es posible factorizarlo de una manera semejante.

En el apartado anterior
$x^2 + bx + c = (x+m)(m+n)$
$b = m + n$
$c = mn$

$(ax)^2 + b(ax) + q = (ax+m)(ax+n)$
$b = m + n$
$q = mn$
En este tipo de factorización


Actual puerto de Alejandría, hogar de Diofanto, padre del álgebra.

La factorización que hemos obtenido es válida, exceptuando porque se obtuvo a partir de un polinomio a veces mayor al polinomio que intentamos factorizar; para obtener la factorización que buscamos, debemos dividir la factorización entre a.

En el polinomio mayor:

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = (ax)^2 + b(ax) + q = (ax+m)(ax+n), \text{ donde } q = ac$$

En el polinomio que factorizamos:

$$ax^2 + bx + c = \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a} = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a} = \frac{(ax)^2 + b(ax) + q}{a} = \frac{(ax+m)(ax+n)}{a}$$

Por lo tanto:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax+m)(ax+n)}{a}$$

siempre y cuando: $b = m + n$ y $q = ac = mn$.

Ejemplo 1

Factorizar $5x^2 - 11x + 6$.

Multiplicamos por 5 el polinomio original, por lo que obtenemos:

$$25x^2 - 11(5x) + 30 = (5x)^2 - 11(5x) + 30.$$

Buscamos dos números que al mismo tiempo sumen -11 y su producto sea 30.

$$(-6) + (-5) = -11 \text{ y } (-6)\,(-5) = 30$$

de donde $(5x)^2 - 11(5x) + 30 = (5x - 5)\,(5x - 6)$, pero el polinomio es cinco veces mayor al polinomio que pretendemos factorizar.

Por ello: $5x^2 - 11x + 6 = \dfrac{(5x-5)(5x-6)}{5} = \dfrac{5(x-1)(5x-6)}{5} = (x-1)(5x-6)$


Faro de Alejandría.

Ejemplo 2

Factorizar $6x^2 + 7x - 3$.

Multiplicando por 6 el polinomio original, tenemos: $36x^2 + 7(6x) - 18 = (6x)^2 + 7(6x) - 18$.

Ahora buscamos dos números que al mismo tiempo sumen 7 y que su producto sea −18.

De las 6 posibilidades que existen, sólo 9 y −2 satisfacen las dos condiciones simultáneamente, pues

$$(+9) + (\ \ 2) = 7 \text{ y } (+9)\ (-2) = -18$$

Entonces, $(6x)^2 + 7(6x) - 18 = (6x + 9)\ (6x - 2)$, pero el polinomio que hemos factorizado es seis veces mayor que el polinomio que pretendíamos factorizar.

Por ello: $36x^2 + 7(6x) - 18 =$

$$\frac{(6x+9)(6x-2)}{6} = \frac{(6x+9)(6x-2)}{(3)(2)} = \frac{(6x+9)}{(3)}\frac{(6x-2)}{(2)} = (2x+3)(3x-1)$$

LO QUE APRENDÍ

I. Factoriza las siguientes expresiones:

1	$ax + ay - bx - by =$	5	$ax - bx + 8ay - 8by =$
2	$am - bm + an - bn =$	6	$3m - 2n - 2nx^3 + 3mx^3 =$
3	$6ax - 3bx + 2ay - by =$	7	$x^2 - a^2 + x - a^2x =$
4	$2ax + 4bx - 2ay + 4by =$	8	$4a^2 - 1 - a^2 + 4a =$

1	$x^2 + 7x + 10 =$	6	$b^2 - 20b + 100 =$	11	$y^2 - 9y + 20 =$
2	$a^2 + 6a + 9 =$	7	$a^2 - 15a + 56 =$	12	$a^2 + a - 2 =$
3	$a^2 - a - 30 =$	8	$y^2 - 5y - 24 =$	13	$x^2 - x - 6 =$
4	$y^2 - 11y + 18 =$	9	$b^2 - 3b - 10 =$	14	$a^2 - 7a + 18 =$
5	$n^2 - n - 2 =$	10	$12 - 8x + x^2 =$	15	$x^2 - 5x - 36 =$

1	$20x^2 + x - 1 =$	3	$6x^2 - 11ax - 10a^2 =$	5	$y^2 - 9y + 20 =$
2	$21a^2 + 11a - 2 =$	4	$-6 - 5a^2 - 6a^4 =$	6	$a^2 + a - 2 =$

División de polinomios

Para dividir un polinomio entre otro, consideramos dos formas; la primera es haciendo uso del algoritmo; la otra es haciendo uso de las propiedades estudiadas hasta este momento.

Ley de los exponentes para la división

Nuestra intención es determinar la división de potencias de la misma base, es decir,

$$\frac{a^m}{a^n}$$

Por la definición de potencia, es posible ver que escribir el numerador como la multiplicación del número **a**, tantas veces como indique el valor de ***m***; asimismo, el denominador llega a ser escrito de manera equivalente como la multiplicación de *a* tantas veces como indica *n*.

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}^{\text{Tantas veces como indica } m}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{\text{Tantas veces como indica } n}}$$

La propiedad fundamental de las fracciones nos permite eliminar los factores que son comunes al numerador y al denominador.

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}^{\text{Tantas veces como indica } m}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a}_{\text{Tantas veces como indica } n}}=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{Tantas veces como indica } m \text{ y } n}$$

Eliminamos en el numerador tantos números como hay números iguales en el denominador.

Por ello, es posible representar la división de potencias de la misma base como:

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

China tiene aportes importantes a la matemática, por ejemplo Liu Hui ó´ãJ propone en el año 263 una aproximación del número pi.

División de un monomio entre otro monomio

Ejemplo 1

Determinar $\frac{x^8}{x^3}$.

Podemos determinar la operación que se solicita de dos formas: por la definición de potencia o, de manera sintética, utilizando la expresión que acabamos de obtener.

Por la definición de potencia:

$$\frac{x^8}{x^3}=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x}=x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x=x^5$$

De manera sintética:

$$\frac{x^8}{x^3} = x^{8-3} = x^5$$

Normalmente ocupamos la forma sintética para resolver este tipo de operaciones.

Ejemplo 2

Determinar $\frac{q^{10}}{q^4}$.

$$\frac{q^{10}}{q^4} = q^{10-4} = q^6$$

Ejemplo 3

Determinar $\frac{18m^4}{2m^6}$

Es necesario considerar por separado los coeficientes y las literales.

$$\frac{18m^4}{2m^6} = \frac{9 \cdot 2}{2} m^{4-6}$$
$$= 9m^{-2}$$

Los antiguos hindúes tenían métodos algebraicos muy desarrollados.

Hemos efectuado la operación indicada; sin embargo, el exponente en la literal es negativo, por lo que es necesario realizar un proceso que nos permita determinar un exponente equivalente, pero con signo positivo.

$-2 = 0 - 2$	Por la propiedad de la existencia del neutro aditivo.
$9m^{-2} = 9m^{0-2}$	Por el principio de sustitución.
$= 9\frac{m^0}{m^2}$	Inverso de la ley de los exponentes para la división. $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
$= 9\frac{1}{m^2}$	Todo número real elevado a la cero potencia es 1. $a^o = 1$
$= \frac{9}{m^2}$	Multiplicando.

Concluimos que $\frac{18m^4}{2m^6} = \frac{9}{m^2}$.

Ejemplo 4

Simplificar la expresión $\frac{4x^{10}}{18x}$.

$$\frac{4x^{10}}{18x} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 9} x^{10-1}$$
$$= \frac{2}{9} x^9$$

División de un polinomio entre un monomio

Ejemplo

Determinar $\dfrac{12x^6-17x^5-6x^4+2x^3}{4x^3}$.

Utilizamos la propiedad distributiva, de manera que dividimos cada uno de los términos del numerador entre el denominador.

$$\begin{aligned}\frac{12x^6-17x^5-6x^4+2x^3}{4x^3} &= \frac{12x^6}{4x^3}-\frac{17x^5}{4x^3}-\frac{6x^4}{4x^3}+\frac{2x^3}{4x^3}\\ &= \frac{3\cdot 4}{4}x^{6-3}-\frac{17}{4}x^{5-3}-\frac{2\cdot 3}{2\cdot 2}x^{4-3}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}x^{3-3}\\ &= 3x^3-\frac{17}{4}x^2-\frac{3}{2}x^1+\frac{1}{2}x^0\\ &= 3x^3-\frac{17}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

La cultura hindú hizo aportaciones muy importantes a la matemática.

División de un polinomio entre otro polinomio (algoritmo)

Empezaremos por dar un requisito para utilizar el algoritmo de la división de polinomios; la expresión algebraica racional debe ser impropia, es decir, el numerador tiene un polinomio de exponente mayor que el denominador.

El algoritmo de la división, que también se basa en la propiedad distributiva, permite resolver divisiones exactas e inexactas. Para explicarlo, nos valemos de un ejemplo.

Ejemplo 1

Determinar el cociente de: $\dfrac{6x^2-7x-19}{2x-5}$.

Pasos	Desarrollo	Explicación
1.	$2x-5\overline{)6x^2-7x-19}$	Empezamos por hacer un arreglo que permita la división.
2.	$\begin{array}{r} 3x \\ 2x-5\overline{)6x^2-7x-19} \end{array}$	Dividimos el primer término del dividendo entre el divisor, es decir, $\dfrac{6x^2}{2x}=3x.$ El resultado se coloca en la parte de arriba del arreglo en la posición del cociente.
3.	$\begin{array}{r} 3x \\ 2x-5\overline{)6x^2-7x-19} \\ \underline{-6x^2+15x} \end{array}$	Multiplicamos cada uno de los términos del divisor por el término que hemos encontrado del cociente; el producto lo colocamos en la parte inferior del arreglo, pero con los signos cambiados. Multiplicamos: $3x(2x-5)=6x^2-15x$. Agregamos: $-6x^2+15x$.

4.	$\begin{array}{r\|l} & 3x \\ \hline 2x-5 & 6x^2-7x-19 \\ & \underline{-6x^2+15x} \\ & \quad 8x \end{array}$	Sumamos o restamos los términos semejantes del arreglo de acuerdo con su signo.
5.	$\begin{array}{r\|l} & 3x \\ \hline 2x-5 & 6x^2-7x-19 \\ & \underline{-6x^2+15x} \\ & \quad 8x \end{array}$	Bajamos los términos restantes del dividendo, que es -19, en este caso.
6.	$\begin{array}{r\|l} & 3x+4 \\ \hline 2x-5 & 6x^2-7x-19 \\ & \underline{-6x^2+15x} \\ & \quad 8x-19 \end{array}$	Repetimos el proceso. Dividimos el primer término del dividendo entre el divisor, es decir, $\frac{8x}{2x}=+4$. El resultado lo colocamos en la parte superior del arreglo.
7.	$\begin{array}{r\|l} & 3x+4 \\ \hline 2x-5 & 6x^2-7x-19 \\ & \underline{-6x^2+15x} \\ & \quad 8x-19 \\ & \quad -8x+20 \end{array}$	Multiplicamos el término que acabamos de encontrar por cada uno de los términos del divisor; el resultado lo colocamos en la parte inferior del arreglo cuidando cambiar cada signo. Multiplicamos: $4(2x-5)=8x-20$. Agregamos: $-8x+20$.
8.	$\begin{array}{r\|l} & 3x+4 \\ \hline 2x-5 & 6x^2-7x-19 \\ & \underline{-6x^2+15x} \\ & \quad 8x-19 \\ & \quad \underline{-8x+20} \\ & \qquad 1 \end{array}$	Simplificamos los términos semejantes en la parte inferior del arreglo.

El cociente de la división es $3x+4$; la división no es exacta, debido a que tenemos un residuo de 1.

Otra forma de expresar la respuesta es:

$$\frac{6x^2-7x-19}{2x-5}=3x+4+\frac{1}{2x-5}$$

Ejemplo 2

Determinar el cociente y el residuo de la división $\frac{3x^3-8x^2+8}{x-2}$.

Debido a que el polinomio del numerador está incompleto, le hace falta el término lineal; utilizaremos un polinomio equivalente para completarlo.

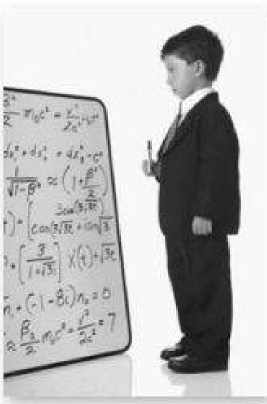
$$3x^3-8x^2+8=3x^3-8x^2+0x+8.$$

Ahora utilizamos el algoritmo para la división de polinomios.

Pasos	Desarrollo	Explicación
1.	$x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$	Empezamos por hacer un arreglo que permita la división.
2.	$3x^2$ $x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$	Dividimos el primer término del dividendo entre el divisor, es decir, $\frac{3x^3}{x}=3x^2$. El resultado se coloca en la parte de arriba del arreglo, en la posición del cociente.
3.	$3x^2$ $x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$ $-3x^3+6x^2$	Multiplicamos cada uno de los términos del divisor por el término que hemos encontrado del cociente; el producto lo colocamos en la parte inferior del arreglo, pero con los signos cambiados. Multiplicamos: $3x^2(x-2)=3x^3-6x^2$. Agregamos: $-3x^3+6x^2$.
4.	$3x^2$ $x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$ $\underline{-3x^3+6x^2}$ $-2x^2$	Sumamos o restamos los términos semejantes del arreglo de acuerdo con su signo.
5.	$3x^2$ $x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$ $\underline{-3x^3+6x^2}$ $-2x^2+0x+8$	Bajamos los términos restantes del dividendo, que es $0x+8$, en este caso.
6.	$3x^2-2x$ $x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$ $\underline{-3x^3+6x^2}$ $-2x^2+0x+8$	Repetimos el proceso. Dividimos el primer término del dividendo entre el divisor, es decir, $\frac{-2x^2}{x}=-2x$. El resultado lo colocamos en la parte superior del arreglo.
7.	$3x^2-2x$ $x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$ $\underline{-3x^3+6x^2}$ $-2x^2+0x+8$ $2x^2-4x$	Multiplicamos el término que acabamos de encontrar por cada uno de los términos del divisor; el resultado lo colocamos en la parte inferior del arreglo cuidando cambiar cada signo. Multiplicamos: $-2x(x-2)=-2x^2+4x$. Agregamos: $2x^2-4x$.
8.	$3x^2-2x$ $x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8}$ $\underline{-3x^3+6x^2}$ $-2x^2+0x+8$ $\underline{2x^2-4x}$ $-4x$	Simplificamos los términos semejantes en la parte inferior del arreglo.

9.	$\begin{array}{r} 3x^2-2x \\ x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8} \\ \underline{-3x^3+6x^2} \\ -2x^2+0x+8 \\ \underline{2x^2-4x} \\ -4x+8 \end{array}$	Bajamos el término que falta de dividir del divisor.
10.	$\begin{array}{r} 3x^2-2x-4 \\ x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8} \\ \underline{-3x^3+6x^2} \\ -2x^2+0x+8 \\ \underline{2x^2-4x} \\ -4x+8 \end{array}$	Repetimos el proceso: Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, es decir, $\frac{-4x}{x}=-4$. Colocamos el número resultante en la parte superior del arreglo, en la posición del cociente.
11.	$\begin{array}{r} 3x^2-2x-4 \\ x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8} \\ \underline{-3x^3+6x^2} \\ -2x^2+0x+8 \\ \underline{2x^2-4x} \\ -4x+8 \\ 4x-8 \end{array}$	Multiplicamos el número que obtuvimos en el paso anterior por cada uno de los términos del divisor; el producto lo colocamos en la parte inferior del arreglo con los signos cambiados. Multiplicamos: $-4(x-2)=-4x+8$. Agregamos: $4x-8$.
12.	$\begin{array}{r} 3x^2-2x-4 \\ x-2\overline{)3x^3-8x^2+0x+8} \\ \underline{-3x^3+6x^2} \\ -2x^2+0x+8 \\ \underline{2x^2-4x} \\ -4x+8 \\ \underline{4x-8} \\ 0 \end{array}$	Simplificamos los términos semejantes en la parte inferior del arreglo.

Ejemplo 3



Determinar el cociente en la siguiente división $\frac{8x^3-27}{2x-3}$.

El numerador tiene un polinomio incompleto, ya que el exponente no es descendente, por lo que es necesario que los términos que hacen falta sean agregados.

$8x^3-27$ es equivalente a $8x^3+0x^2+0x-27$.

$$\frac{8x^3-27}{2x-3}=\frac{8x^3+0x^2+0x-27}{2x-3}$$

Ahora procedemos a dividir utilizando los pasos descritos.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2+6x+9 \\
\hline
2x-3 & 8x^3+0x^2+0x-27 \\
 & \underline{-8x^3+12x^2} \\
 & \quad 12x^2+0x-27 \\
 & \quad \underline{-12x^2+18x} \\
 & \qquad 18x-27 \\
 & \qquad \underline{-18x+27} \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\dfrac{8x^3-27}{2x-3}=4x^2+6x+9$.

Es decir, el cociente es $4x^2+6x+9$.

División de un polinomio entre otro polinomio (factorización)

La división de un polinomio entre otro también puede ser realizada factorizando el numerador, el proceso es sencillo, ya que no tiene tantos pasos como los expuestos en la sección anterior; sin embargo, presenta una dificultad especial en el sentido de que es necesario determinar el tipo de factorización de que se trata. Otra dificultad que presenta el método de factorización es que la división debe ser exacta para realizarla.

Ejemplo 1

Determinar el cociente de la siguiente división: $\dfrac{9x^2+12x+4}{3x+2}$.

El numerador es un trinomio cuadrado perfecto, por lo que podemos factorizarlo como la suma de dos términos al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
\frac{9x^2+12x+4}{3x+2} &= \frac{(3x+2)^2}{3x+2} \\
&= \frac{(3x+2)(3x+2)}{3x+2} \\
&= 3x+2
\end{aligned}
$$

El cociente de la división es $3x+2$.

Ejemplo 2

Resolver la división: $\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}$.

El trinomio que está en el numerador tiene la forma x^2+bx+c, por lo que buscaremos dos números que, sumados, den 5 y multiplicados -6. Estos números son 6 y -1, pues:

$(6)+(-1)=5$
$(6)(-1)=-6$

Entonces,

$$x^2+5x-6=(x+6)(x-1)$$

Lo que permite expresar la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+5x-6}{x-1}&=\frac{(x+6)(x-1)}{x-1}\\&=x+6\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{x^2+5x-6}{x-1}=x+6.$

LO QUE APRENDÍ

I. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\dfrac{5x^2-5x}{x-1}$
2. $\dfrac{3x^3+6x^2-9x}{3x}$
3. $\dfrac{x^2-4}{3x-6}$
4. $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-16}$
5. $\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-4x-12}$
6. $\dfrac{4ax+2bx+6ay+3by}{4x^2-9y^2}$
7. $\dfrac{x+x^2-xy^2-y^2}{x^2+2x+1}$
8. $\dfrac{8x^3+36x^2+54x+27}{10x^2+13x-3}$

II. Determina el cociente y el residuo de cada una de las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{m^9}{m}$
2. $\dfrac{x^{10}}{x^3}$
3. $\dfrac{n^3}{n^7}$

4 $\dfrac{100x^7}{4x^3}$

5. $\dfrac{26x^{12}}{18x^6}$

6. $\dfrac{40m^9}{2m^2}$

7. $\dfrac{32x^2}{16x^9}$

8. $\dfrac{18x^5-24x^4}{2x^2}$

9. $\dfrac{24m^{10}-32m^8+12m^7}{4m^5}$

10. $\dfrac{80x^4-16x^3+4x^2}{4x^2}$

Parte 2

Ecuaciones

Unidades de competencia

- Construye modelos utilizando propiedades de expresiones algebraicas.
- Identifica las características presentes de tablas, gráficas, mapas, diagramas o textos, provenientes de situaciones cotidianas, y los traduce a un lenguaje algebraico.

Ecuaciones
Competencias disciplinares

Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Conocimientos

- Analiza y modela situaciones utilizando ecuaciones lineales.
- Describe técnicas de solución de ecuaciones lineales.
- Reconoce ecuaciones en dos variables.
- Reconoce la solución de sistemas de 2×2.
- Reconoce los pasos esenciales de cada método de solución de sistemas de ecuaciones.
- Interpreta situaciones en las que se hace uso de ecuaciones simultáneas para obtener una solución.
- Comprende los métodos para resolver sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas (3×3).
  - Método numérico por determinantes.
  - Método algebraico de sustitución.
- Ubica e interpreta situaciones diversas utilizando sistemas 3×3.
- Identifica ecuaciones cuadráticas incompletas en una variable.
- Comprende los pasos necesarios para resolver una ecuación cuadrática incompleta (extracción de factor común y despeje de una incógnita).
- Identifica ecuaciones cuadráticas completas.
- Comprende los pasos necesarios para resolver una ecuación cuadrática completa.
- Identifica las raíces reales de una ecuación cuadrática.

Habilidades

- Resuelve ecuaciones lineales con distintas técnicas.
- Resuelve problemas que se pueden representar con ecuaciones lineales.
- Resuelve sistemas de ecuaciones de 2×2 utilizando distintos métodos.
- Resuelve problemas en los que es posible utilizar ecuaciones simultáneas de 2×2 para obtener la solución.
- Obtiene la solución de sistemas de ecuaciones lineales 3×3.
- Aplica el método numérico por determinantes para resolver sistemas 3×3.
- Utiliza el método de sustitución para resolver sistemas 3×3.
- Obtiene la solución de una ecuación cuadrática por:
  - Factor común.
  - Completar trinomio cuadrado perfecto.
  - Factorización de trinomios cuadrados.
- Representa y resuelve situaciones utilizando ecuaciones cuadráticas con una variable.

Actitudes y valores

- Reflexiona respecto a la ventaja de realizar diversas transformaciones algebraicas para simplificar o interpretar resultados.
- Propone maneras creativas de solucionar un problema.
- Reconoce sus errores en los procedimientos algebraicos y busca solucionarlos.
- Aprecia la diversidad y efectividad de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2×2.
- Valora la aplicabilidad de los sistemas 2×2 en la modelación y solución de diversas situaciones.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con lo que cuenta, al realizar actividades asignadas.
- Aprecia la simplicidad de los métodos numéricos para resolver sistemas 3×3.
- Valora la utilidad de los sistemas 3×3 para representar y solucionar diversas situaciones.
- Aprecia la utilidad de emplear métodos específicos para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas.
- Valora la importancia de contar con un método algebraico para resolver todo tipo de ecuación cuadrática en una variable.
- Valora la aplicabilidad de las ecuaciones cuadráticas para representar y resolver diversas situaciones.

Bloque III Ecuaciones lineales

Lección 1

Ecuaciones lineales con una variable

Información complementaria

- Existe un programa de distribución gratuita llamado DeadLine donde podrás experimentar con problemas matemáticos en la siguiente dirección electrónica: http://download.cnet.com/DeadLine/3000-2053_410489854.html?tag=mncol; en caso de no encontrarlo en el enlace mencionado, puedes buscarlo en la página electrónica: http://download.cnet.com, en la sección educational software, para entrar a Math software.
- Un programa en línea que nos permite trazar gráficas de funciones y determinar el punto en que se intersecan, se encuentra en http://www.fooplot.com/, cuando cargue, tendrás en pantalla una graficadora que puede trazar varias funciones al mismo tiempo.

PRODUCTO

Junto con dos de tus compañeros, analicen la siguiente situación y contesten las preguntas.

José recibe una carta con el siguiente texto:

Estimado amigo.

Esta es una cadena de cartas; debes enviar un peso a la primera persona que aparece en la lista.

1. *Abigaíl. San Benito núm. 134, colonia Adolfo Ruiz Cortines, Delegación Iztapalapa, Distrito Federal.*
2. *Susana. Sor Juana Inés de la Cruz núm. 20, colonia La Peñita, Delegación Benito Juárez, Distrito Federal.*
3. *Alejandra. El Quelite núm. 122, colonia América, Naucalpan, Estado de México.*
4. *Rodrigo. Eduardo Nájera núm. 436, colonia Benito Juárez, Cajeme, Sonora.*
5. *Roberto. Av. Izcalli núm. 342, colonia El Castillo, Veracruz, Veracruz.*

Envía cinco cartas con una nueva lista; elimina el primer nombre que aparece; los nombres deben ascender en la numeración de la nueva lista y el tuyo colócalo en el número 5.

Si suponemos que José decide cumplir con la tarea que se encuentra descrita en la carta:

1. ¿Qué cantidad de personas recibirán la carta de José? ____________________

2. ¿Qué cantidad de dinero sería enviado por sus amigos si todos cumplen con la tarea descrita en la carta? ____________________

3. Si los amigos de José escriben las cartas que les corresponde, ¿cuántas personas recibirían éstas? ____________________

4. ¿Qué cantidad de dinero sería enviada en esta ocasión? ____________________

5. Si la cadena continúa y todos los participantes cumplen con las instrucciones, ¿cuánto dinero recibiría José en el momento en que su nombre sea escrito en el primer lugar de la lista? ____________________

6. La cadena descrita en la presente actividad es una práctica ilegal. ¿A qué crees que se deba esto?

____

____

La ecuación y sus propiedades

Una ecuación es una igualdad; en ella participan cantidades conocidas y desconocidas, así como operaciones que las relacionan.

Un ejemplo de una ecuación es: $5x - 8 = 2$.

Las ecuaciones se encuentran formadas por dos partes fundamentales, que reciben su nombre de acuerdo con la posición que ocupan en la ecuación; el primer y segundo miembros se encuentran a la izquierda y derecha del símbolo igual, respectivamente.

$$\underbrace{5x - 8}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{2}_{\text{Segundo miembro}}$$

Las igualdades tienen y cumplen con una serie de propiedades que nos permiten tratarlas de manera formal. Las propiedades que se pueden deducir de forma inmediata son:

Si a, b y c pertenecen a los números reales, entonces:			
Nombre	**Representación algebraica**	**Significado en lenguaje coloquial**	**Ejemplo**
Propiedad reflexiva	$a = a$	Todo número es igual a sí mismo.	Si tenemos $a + b$, entonces $a + b = a + b$.
Propiedad simétrica	Si $a = b$, entonces $b = a$.	Es posible intercambiar los miembros de una igualdad sin que ésta se altere.	Si $2 + 3 = 5$, entonces $5 = 2 + 3$.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Propiedad transitiva	Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$.	Si dos expresiones son iguales a una tercera, entonces éstas son iguales entre sí.	Si $1+3=4$ y $4=2\times 2$, entonces $1+3=2\times 2$.
Principio de sustitución	Si $a=b$, entonces ambas pueden ser utilizadas en cualquier proposición sin que el valor de verdad de ésta cambie.	Si dos expresiones son iguales, éstas pueden ser sustituidas en cualquier proposición sin que el valor de verdad cambie.	$3+1=4$ Entonces, es lo mismo escribir $4+1=5$ que $3+1+1=5$.

Si bien tales propiedades son las que se pueden deducir de manera inmediata a partir de lo que significa una igualdad, hay otro grupo de propiedades que nos permiten resolver ecuaciones, por ello su importancia.

Si *a*, *b* y *c* pertenecen a los número reales, entonces:

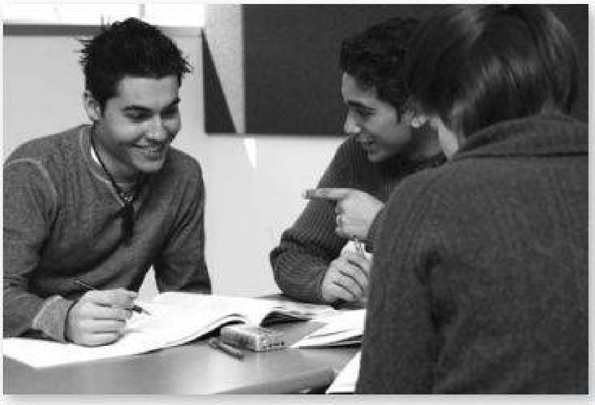
Nombre	Representación algebraica	Significado en lenguaje coloquial	Ejemplo
Propiedad de la suma	Si $a=b$, entonces $a+c=b+c$.	Podemos sumar el mismo número a los miembros de una igualdad y ésta no se altera.	Si $5+1=4+2$, entonces $5+1+3=4+2+3$ $9=9$
Propiedad de la resta	Si $a=b$, entonces $a-c=b-c$.	Podemos restar el mismo número a los miembros de una igualdad y ésta no se altera.	Si $5+1=4+2$, entonces $5+1-2=4+2-2$ $4=4$
Propiedad de la multiplicación	Si $a=b$, entonces $ac=bc$.	Podemos multiplicar el mismo número a los miembros de una igualdad y ésta no se altera.	Si $5+1=4+2$, entonces $(5+1)3=(4+2)3$ $(6)3=(6)3$ $18=18$
Propiedad de la división	Si $a=b$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ $c\neq 0$.	Podemos dividir los miembros de una igualdad entre el mismo número y ésta no se altera.	Si $5+1=4+2$, entonces $\frac{5+1}{2}=\frac{4+2}{2}$ $\frac{6}{2}=\frac{6}{2}$ $3=3$

Dichas propiedades están expresadas de manera que se hace la diferencia entre la suma y la resta, además de la multiplicación y la división; desde el punto de vista formal, las primeras dos se conocen como propiedad aditiva de la igualdad y las siguientes como propiedad multiplicativa de la igualdad. Hemos preferido hacer la diferencia por motivos prácticos; esperamos que con ello tengas mayor facilidad para aplicar las propiedades en situaciones específicas.

Técnicas de solución de ecuaciones de primer grado con una variable

Podemos resolver una ecuación de primer grado con una variable de varias formas; en primer lugar, es posible ocupar las propiedades de la igualdad que hemos enunciado, lo haremos de forma sintética o por método gráfico. En ocasiones conviene más utilizar una técnica por las características de la ecuación, el problema que deseamos resolver o las intenciones que buscamos.

Método formal



A continuación estudiaremos la forma de resolver una ecuación de primer grado con una variable, utilizando las propiedades de los números reales y de la igualdad que enunciamos en apartados anteriores.

Ejemplo 1

Determinar el valor de la literal en la ecuación $6x-5=15$.

El método formal consiste en expresar cada uno de los pasos para resolver la ecuación y enunciar la razón por la que se hizo.

Afirmaciones	Razones
$6x-5=15$	Hipótesis.
$6x-5+5=15+5$	Propiedad de la suma de la igualdad.
$6x+0=15+5$	Propiedad de la existencia del inverso aditivo.
$6x=15+5$	Propiedad de la existencia del neutro aditivo.
$6x=20$	Sumando (propiedad de cerradura para la adición).
$\frac{6x}{6}=\frac{20}{6}$	Propiedad de la división de la igualdad.
$1 \cdot x=\frac{20}{6}$	Propiedad de la existencia del inverso multiplicativo.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$x=\frac{20}{6}$	Propiedad de la existencia del neutro multiplicativo.
$x=\frac{10}{3}$	Simplificación de la expresión racional.

Para comprobar el resultado, es necesario que sustituyamos el valor de la incógnita en la ecuación original para comprobar si la igualdad se mantiene.

$$
\begin{aligned}
6x-5&=15\\
6\left(\frac{10}{3}\right)-5&=15\\
\frac{6}{1}\left(\frac{10}{3}\right)-5&=15\\
\frac{60}{3}-5&=15\\
20-5&=15\\
15&=15
\end{aligned}
$$

En vista de que los dos miembros de la igualdad son los mismos, concluimos que la respuesta es correcta.

Para aprender a trabajar con las propiedades de la igualdad, en la solución de un problema, es importante que tomes en cuenta por principio cuál es la intención de este trabajo; lo importante es concentrarse en que la literal o las literales estén en uno de los miembros de la igualdad y los números en otra; además, es necesario que cada paso se haga por separado para así poder argumentar cuál es la propiedad que lo justifica.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $3x-8=5x+16$.

Deseamos que las literales queden en el segundo miembro de la igualdad y los números en el primero; por ello, empezaremos por ocupar propiedades que nos permitan lograr tal objetivo.

$3x-8=5x-16$	Hipótesis.
$3x-8-3x=5x-16-3x$	Propiedad de la resta de la igualdad.
$0-8=5x-16-3x$	Propiedad de la existencia del inverso aditivo.
$-8=5x-16-3x$	Propiedad de la existencia del neutro multiplicativo.
$-8=2x-16$	Reducción de términos semejantes.
$-8+16=2x-16+16$	Propiedad de la suma de la igualdad.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

$-8+16=2x+0$	Propiedad de la existencia del inverso aditivo.
$-8+16=2x$	Propiedad de la existencia del neutro aditivo.
$8=2x$	Propiedad de cerradura.
$\frac{8}{2}=\frac{2x}{2}$	Propiedad de la división de la igualdad.
$\frac{8}{2}=1\cdot x$	Propiedad de la existencia del inverso multiplicativo.
$\frac{8}{2}=x$	Propiedad de la existencia del neutro multiplicativo.
$4=x$	Simplificación de la expresión racional.

Comprobación:

$$\begin{aligned} 3x-8&=5x-16\\ 3(4)-8&=5(4)-16\\ 12-8&=20-16\\ 4&=4 \end{aligned}$$

Este método permite encontrar las soluciones de una ecuación además de explorar las relaciones y propiedades entre las estructuras en que se presenten los diferentes números.

Ejemplo 3

Demostrar que si $a+x=a$, entonces $x=0$.

$a+x=a$	Hipótesis.
$-a+(a+x)=a+(-a)$	Propiedad de la suma de la igualdad.
$-a+(a+x)=0$	Propiedad de la existencia del inverso aditivo.
$(-a+a)+x=0$	Propiedad asociativa.
$0+x=0$	Propiedad de la existencia del inverso aditivo.
$x=0$	Propiedad de la existencia del neutro aditivo.

En este ejercicio se ha demostrado que si en la suma de dos números uno de ellos no altera su valor, el otro número necesariamente es el cero.

LO QUE APRENDÍ

I. Justifica cada uno de los pasos que se ocuparon en la demostración que a continuación se presenta, haciendo uso de las propiedades de los números reales y de la igualdad.

Si a y b pertenecen a los números reales, entonces $(-a)(b)=-(ab)$.

Afirmaciones	Razones
$(-a)(b)=(-a)(b)$	
$(-a)(b)+ab=(-a)(b)+ab$	
$(-a)(b)+ab=[(-a)+a]b$	
$(-a)(b)+ab=0\cdot b$	
$(-a)(b)+ab=0$	
$(-a)(b)+ab+(-ab)=0+(-ab)$	
$(-a)(b)+0=0+(-ab)$	
$(-a)(b)=-ab$	

¿Qué es lo que asegura la proposición demostrada?

____

____

____

II. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones, utilizando para ello las propiedades de la igualdad.

1. $4x-12=8$
2. $2x+3=9$
3. $6x-9=3x+21$
4. $9x+12=x-4$

Método de transposición o sintético

Es posible hacer el mismo procedimiento, es decir, determinar el valor de la literal, ahorrando una cantidad significativa de pasos; para ello, buscaremos determinar qué operación realiza cada uno de los números que participan en la ecuación, el miembro en que se encuentra y qué pasaría con él si utilizamos las propiedades de la igualdad.

Ejemplo 1

Determinar el valor de la incógnita en la expresión $4x - 9 = 7$.

Método formal		Método sintético
$4x - 9 = 7$	Hipótesis.	$4x - 9 = 7$
$4x - 9 + 9 = 7 + 9$	Propiedad de la suma de la igualdad.	$4x = 7 + 9$
$4x + 0 = 7 + 9$	Propiedad de la existencia del inverso aditivo.	
$4x = 7 + 9$	Propiedad de la existencia del neutro aditivo.	
$4x = 16$	Propiedad de cerradura.	$4x = 16$
$\frac{4x}{4} = \frac{16}{4}$	Propiedad de división de una igualdad.	$x = \frac{16}{4}$
$1 \cdot x = \frac{16}{4}$	Propiedad de la existencia del inverso multiplicativo.	
$x = \frac{16}{4}$	Propiedad de la existencia del neutro aditivo.	
$x = 4$	Dividiendo.	$x = 4$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 4x - 9 &= 7 \\ 4(4) - 9 &= 7 \\ 16 - 9 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de la incógnita en la ecuación $6x-(2x-7)=x-14$.

$6x-(2x-7)=x-14$	
$6x-2x+7=x-14$	Eliminando el paréntesis
$4x+7=x-14$	Reduciendo términos semejantes
$4x+7-x=-14$	Colocando los términos con literales en el primer miembro
$3x+7=-14$	Reduciendo términos semejantes
$3x=-14-7$	Colocando los términos que no tienen literales en el segundo miembro
$3x=-21$	Simplificando
$x=\frac{-21}{3}$	Quitando el coeficiente de la literal
$x=-7$	Dividiendo

Comprobación:

$$6x-(2x-7)=x-14$$
$$6(-7)-\left[2(-7)-7\right]=-7-14$$
$$-42-(-14-7)=-21$$
$$-42-(-21)=-21$$
$$-42+21=-21$$
$$-21=-21$$

El método de transposición es más económico en cuanto a pasos; sin embargo, en ocasiones es necesario que recurramos al método formal, debido a las características de una ecuación.

Ejemplo 3

Determinar el valor de la incógnita en la ecuación $\frac{x-5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{x-3}{2}$

La dificultad para resolver dicha ecuación estriba en la forma que tiene, ya que cuenta con una forma fraccionaria, por lo que ocuparemos la propiedad de la multiplicación en una igualdad para expresar la ecuación con coeficientes fraccionarios en otra ecuación equivalente pero de coeficientes enteros. Para ello, multiplicamos la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

$$\frac{x-5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{x-3}{2}$$
$$12\left(\frac{x-5}{6}-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{x-3}{2}\right)12$$
$$\frac{12}{1}\left(\frac{x-5}{6}-\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{x-3}{2}\right)\frac{12}{1}$$
$$\frac{12x-60}{6}-\frac{36}{4}=\frac{12x-36}{2}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Mínimo común múltiplo: 12

Habiendo multiplicado los dos miembros de la igualdad, ahora es posible dividir los numeradores entre los denominadores, y de esta manera, expresar los coeficientes de la ecuación con números enteros las fracciones.

$2x-10-9=6x-18$

$2x-10-9-6x=-18$ Dejando los términos con literales en el primer miembro de la igualdad

$-4x-10-9=-18$ Reduciendo términos semejantes

$-4x=-18+10+9$ Dejando los términos sin literales en el segundo miembro

$-4x=1$ Reduciendo

$$x=\frac{1}{-4}$$
$$x=-\frac{1}{4}$$

LO QUE APRENDÍ

I. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones utilizando el método de transposición.

1. $6x=18$
2. $5x=10$
3. $x-20=8$
4. $x+4=6$
5. $4x-2=8$
6. $3x-12=8$
7. $4x+12=-8$
8. $3x+8=12$
9. $6x-10=2x-30$
10. $4x+3=-x-22$

Método gráfico

Para utilizar el método gráfico es necesario que la ecuación que pretendemos resolver presente la forma $mx + b = 0$, para poder asociarla a la función lineal $f(x) = mx + b$. En la función, el valor de la literal (x) adquiere distintos e infinitos valores y para encontrar la solución de la ecuación, se deberá buscar un valor de x de manera que la función $f(x)$ sea igual a cero.

Al valor de x que garantiza que $f(x) = 0$ se le llama raíz de la ecuación

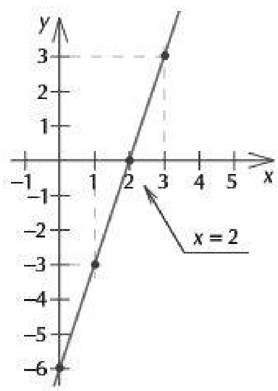
Ejemplo 1

Determinar el valor de la literal en la ecuación $3x - 6 = 0$.

La ecuación que pretendemos resolver ya tiene la forma para ocupar el método gráfico; por ello, la asociaremos con la función lineal $f(x) = 3x - 6$ con la finalidad de encontrar la solución de la ecuación.

$$f(x) = 3x - 6$$
$$f(-3) = 3(-3) - 6 = -9 - 6 = -15$$
$$f(-2) = 3(-2) - 6 = -6 - 6 = -12$$
$$f(-1) = 3(-1) - 6 = -3 - 6 = -9$$
$$f(0) = 3(0) - 6 = 0 - 6 = -6$$
$$f(1) = 3(1) - 6 = 3 - 6 = -3$$
$$f(2) = 3(2) - 6 = 6 - 6 = 0$$

Con los valores de x y de y es posible trazar la gráfica de la función; al mismo tiempo, se puede observar que la solución de la ecuación concuerda con la intersección de la recta y el eje de las x.



Es relativamente fácil visualizar en la gráfica el valor de x que hace que la función obtenga el valor de cero, es decir, $f(x) = 0$.

En vista de que $f(2) = 0$, entonces el valor de la incógnita en la ecuación que estamos resolviendo es $x = 2$.

Comprobación:

$$3x-6=0$$
$$3(2)-6=0$$
$$6-6=0$$
$$0=0$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $2x+8=4x-1$.

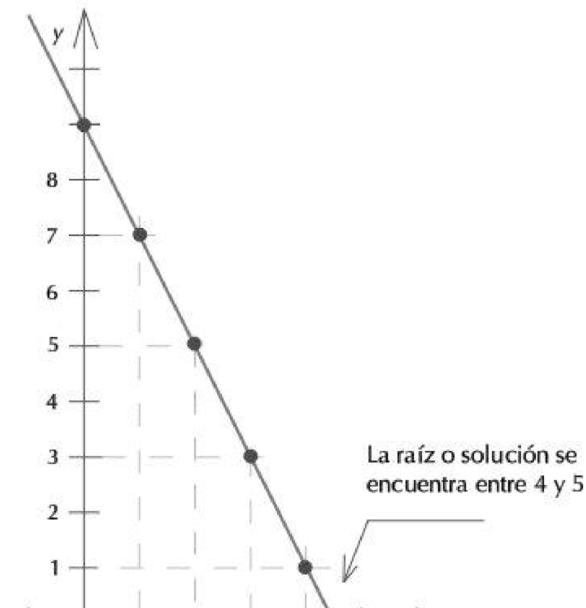
La ecuación que intentamos resolver no tiene la forma adecuada para trabajar el método gráfico, por lo que empezaremos por igualarla a cero, es decir, buscaremos que el segundo miembro de la igualdad sea cero, utilizando el método de transposición.

$$2x+8=4x-1$$
$$2x+8-4x+1=0$$
$$-2x+9=0$$

Ahora que ya le hemos dado la forma adecuada a la ecuación, la asociaremos a una función lineal, en este caso a $f(x)=-2x+9$, y le daremos distintos valores a x para ver en qué momento la función adopta el valor de cero.

$$f(x)=-2x+9$$
$$f(0)=-2(0)+9=0+9=9$$
$$f(1)=-2(1)+9=-2+9=7$$
$$f(2)=-2(2)+9=-4+9=5$$
$$f(3)=-2(3)+9=-6+9=3$$
$$f(4)=-2(4)+9=-8+9=1$$
$$f(5)=-2(5)+9=-10+9=-1$$

Por el momento parece que no fue posible determinar la solución al darle distintos valores a la variable x, por lo que procederemos a trazar la gráfica de la función.



Es posible observar que la solución de la ecuación que buscamos se encuentra entre el 4 y 5; supondremos que la solución es 4.5 y lo sustituiremos en la ecuación de la función.

$$f(4.5) = -2(4.5) + 9 = -9 + 9 = 0$$

El valor de la incógnita que buscamos es 4.5.

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x + 8 &= 4x - 1 \\ 2(4.5) + 8 &= 4(4.5) - 1 \\ 9 + 8 &= 18 - 1 \\ 17 &= 17 \end{aligned}$$

Es evidente que el método gráfico para solucionar ecuaciones es tan preciso como lo permita la calidad de la gráfica trazada; por lo regular, decimos que la respuesta es una aproximación. Es importante el empleo de este método, por ejemplo, en algunas aplicaciones prácticas en ingeniería.

LO QUE APRENDÍ

I. Determina el valor de la incógnita en cada una de las siguientes ecuaciones haciendo uso del método gráfico.

1. $3x - 6 = 0$
2. $2x - 8 = 0$
3. $-x + 1 = 0$
4. $-3x - 12 = 0$
5. $4x + 12 = 0$
6. $x + 5 = 0$
7. $-2x + 8 = 0$
8. $-5x - 5 = 0$
9. $2x - 8 = x - 2$
10. $5x = 2x - 12$

II. Las ecuaciones que a continuación se muestran tienen como solución un número que se encuentra entre dos números enteros; aproxima la solución a dos decimales después del punto. *Nota*: se sugiere el uso de papel milimétrico.

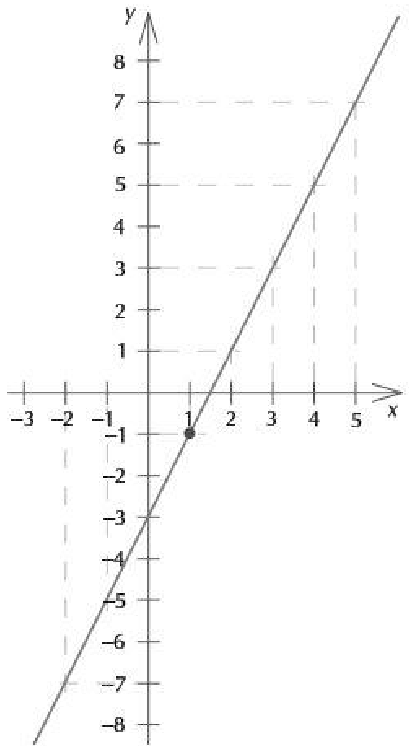
1. $3x - 8 = 0$
2. $4x - 7 = 0$
3. $6x + 4 = 1 - x$

4. $5-2x=3x$

5. $2-x=10x-25$

6. $6x+7=-4$

III. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función $f(x)=2x-3$, a partir de la cual podemos encontrar la solución de una infinidad de ecuaciones si vemos la gráfica con un sentido distinto al explicado en la lección. Completa la tabla colocando la solución de la ecuación o la ecuación que es posible resolver con la gráfica mostrada.



Ecuación	Solución	Punto de la gráfica
$2x-3=-7$	$x=-2$	$(-2,-7)$
$2x-3=-5$	$x=-1$	$(-1,-5)$
$2x-3=-3$		
	$x=2$	
$2x-3=7$		
		$(1,-1)$
$2x-3=3$		
	$x=\frac{1}{2}$	
		$\left(\frac{3}{2},0\right)$
$2x-3=\frac{5}{2}$		

Situaciones que generan ecuaciones de primer grado con una variable

Hay una innumerable cantidad de situaciones que se pueden modelar a través de las ecuaciones de primer grado, todas provenientes de distintas áreas del pensamiento humano; podemos contar la matemática misma, la química, la física, situaciones geográficas y muchas otras, todas ellas expresadas como problemas que requieren una solución en la que aparecen cantidades conocidas y desconocidas.

Para resolver un problema, lo primero que debe quedarnos claro es lo que se busca encontrar de éste y determinar cuáles son los datos que nos proporciona para, a partir de ello, establecer algún tipo de estrategia que nos permita encontrar lo que buscamos.

Ejemplo 1

Determinar el valor de dos números naturales consecutivos que sumen 71.

La primera tarea es entender el problema, las partes que lo forman, la información que nos proporciona y cómo se relacionan las cantidades conocidas y desconocidas.

determina el valor de dos números naturales consecutivos que sumen 71

Sección del enunciado que indica lo que estamos buscando.

Indica la relación entre las cantidades y nos proporciona un dato.

Determinaremos lo que buscamos; en el caso del problema que nos ocupa, es el valor de dos números, los cuales pueden ser representados con letras distintas.

x es el valor de uno de los números.
y es el valor del otro número.

Ahora podemos representar la relación entre los números con una operación e involucrar el dato que nos proporcionaron.

$$x + y = 71$$

Ejemplos de números naturales consecutivos son el 1 y 2, el 2 y el 3, etcétera. La característica presente es que si le sumamos uno al primer número obtendremos el segundo.

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 1 \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

De manera que si consideramos que el primer número es x, entonces el segundo número es x más uno.

$$y = x + 1$$

Si utilizamos el principio de sustitución en la primera ecuación, obtendremos una ecuación de primer grado con una variable.

$$x + x + 1 = 71$$

la cual puede ser resuelta utilizando los métodos estudiados en esta lección.

$$\begin{aligned} x + x + 1 &= 71 \\ 2x + 1 &= 71 \\ 2x &= 71 - 1 \\ 2x &= 70 \\ x &= \frac{70}{2} \\ x &= 35 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los números que buscamos son 35 y 36.

Ejemplo 2

La distancia entre la costa de Veracruz y la Isla de los Sacrificios es de 1600 metros. Si al mismo tiempo una lancha parte de la costa a una velocidad de 10 metros sobre segundo y otra zarpa de la isla a 12 metros sobre segundo, y si ambas tienen como destino el punto de partida de la otra lancha, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

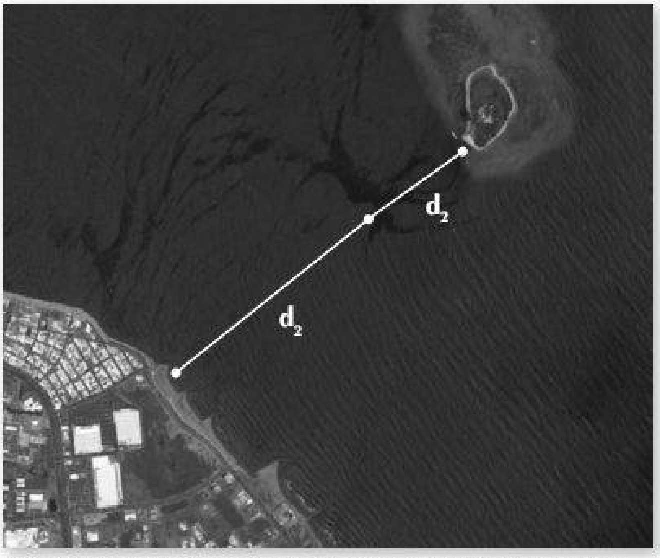
La velocidad se determina como la distancia sobre el tiempo; si despejamos en esta relación, encontraremos la expresión que determina la distancia.

$$v = \frac{d}{t}$$

$$v \cdot t = d$$

$$d = v \cdot t$$

Como buscamos el momento en el que las lanchas se encontrarán, entonces habrán recorrido entre las dos la distancia que existe entre la isla y la costa, lo cual podemos expresar de la siguiente forma.



Fotografía satelital de la costa de Veracruz y la Isla de los sacrificios.

$$d_1 + d_2 = 1600$$

Conocemos la distancia que recorre cada una de las lanchas, y en vista de que conocemos también sus velocidades y la fórmula que obtuvimos en el despeje de la expresión que determina la velocidad.

$$d_1 = 10t$$

$$d_2 = 12t$$

Por el principio de sustitución.

$$10t + 12t = 1600$$

$$22t = 1600$$

$$t = \frac{1600}{22}$$

$$t = 72.72$$

Es decir, las lanchas tardan 72.72 segundos en encontrarse, o sea, 1 minuto 12 segundos, aproximadamente.

Ejemplo 3

Un comerciante tiene dos clases de café, con costos de 100 y 200 pesos por kilogramo, respectivamente. ¿Qué cantidad de café de cada grano habrá de combinar para obtener 300 kilogramos de un café que cueste 120 pesos por kilogramo?

Teniendo dos distintos tipos de café, la mezcla del mismo la podemos formar tomando cierto número de kilogramos de cada tipo de café con los que cuenta; tomaremos las literales x y y para representar los kilogramos de cada tipo de café; al combinar estas cantidades obtendremos el total de café que pretendemos.

$$x + y = 300$$

La cantidad de kilogramos que utilizaremos del café representado con y es equivalente a $y = 300 - x$.

El precio que hay que pagar por cada tipo de café se obtiene al multiplicar su precio por los kilogramos que deseamos, de esta forma pagaremos $100x$ por el café que cuesta 100 pesos por kilogramo y $200y$ por aquel que cuesta 200; en total, deberán pagarse 300(120) por la nueva mezcla que buscamos. La suma de los precios de las partes que forman la mezcla habrán de sumar el precio total de la nueva mezcla, es decir,

$$100x + 200y = 300(120)$$

Ahora podemos sustituir y por su equivalente, de manera que obtendremos la ecuación de primer grado que resuelve el problema.

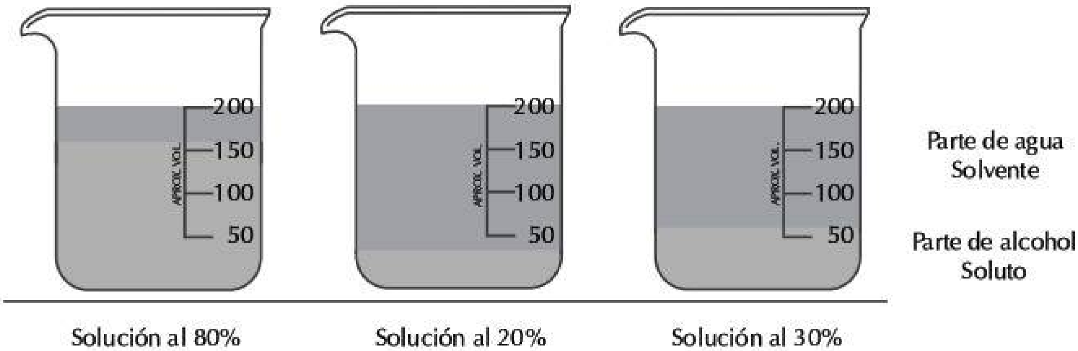
$$\begin{aligned}
100x + 200(300 - x) &= 300(120) \\
100x + 60000 - 200x &= 36000 \\
-100x &= 36000 - 60000 \\
-100x &= -24000 \\
x &= \frac{-24000}{-1000} \\
x &= 240
\end{aligned}$$

Ejemplo 4

¿Cuántos litros de una mezcla que contiene 80% de alcohol se deben agregar a 5 litros de una solución que está al 20% para producir una solución al 30%?

En distintas situaciones ocupamos soluciones que se encuentran en cierto porcentaje de un líquido; por ejemplo, cuando decimos que una solución se encuentra al 80% de alcohol, se nos indica que 80 partes de la solución es alcohol y 20 partes son agua.

Ejemplos de:



Las imágenes son ilustrativas, ya que en la vida real no es posible observar la separación entre el agua y el alcohol, de hecho se encuentran integradas las partes una en la otra.

Si x es el número de litros que utilizaremos de la solución que está al 80% para agregarlos a los 5 litros de la otra solución, entonces la cantidad de litros que obtendremos es $x+5$.

El alcohol contenido en cada solución es:

1. $0.8x$ de la primera solución.
2. $0.2(5)$ de la segunda solución.
3. $0.3(x+5)$ en la solución que obtendremos.

Con base en esto, podemos establecer una relación en la cantidad de alcohol que hay en cada parte de la solución de la siguiente forma:

$$0.8x + 0.2(5) = 0.3(x+5)$$

Al resolver la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0.8x + 1 &= 0.3x + 1.5 \\ 0.8x - 0.3x &= 1.5 - 1 \\ 0.5x &= 0.5 \\ x &= \frac{0.5}{0.5} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Debemos ocupar un litro de la solución al 80% para combinarla con aquella que tiene 20% de alcohol y obtener una nueva solución al 30%.

I. Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

1. Determinar tres números consecutivos cuya suma sea 79.

2. Obtener dos números pares consecutivos que sumen 70.

3. Determinar dos números consecutivos impares que sumen 148.

4. El perímetro de un cuadrado es de 40 centímetros. ¿Cuál es la longitud de sus lados?

5. Si el perímetro de un rectángulo es de 16 cm, encontrar los lados del rectángulo si su largo es 3 centímetros mayor a su ancho.

6. Un triángulo tiene tres lados distintos, si el primero mide 8 unidades, se desconoce la longitud del segundo y el tercero es 2 unidades mayor que el segundo de sus lados, ¿qué longitudes tienen sus lados si su perímetro es de 24 unidades?

7. La distancia entre las ciudades *A* y *B* es de 340 kilómetros. Dos trenes parten al mismo tiempo de cada ciudad y tienen como destino la otra ciudad. Si el tren que parte de la ciudad *A* lleva una velocidad de 100 kilómetros sobre hora y el de la ciudad *B* de 80 kilómetros sobre hora, ¿en qué momento los trenes se encontrarán? ¿A qué distancia de la ciudad A lo harán?

8. Una lancha alcanza una velocidad de 120 km/h en agua tranquila y sin viento; cierto día, un piloto observa que puede hacer un recorrido en 42 minutos (0.7 horas), con viento a favor, y en 54 minutos (0.9 horas), con viento en contra, ¿cuál es la velocidad del viento? *Nota*: A la velocidad de la lancha se le suma o resta directamente la velocidad del viento a favor o en contra, respectivamente, para determinar la velocidad de la lancha.

9. Determinar la cantidad de solución a 30% que debe agregarse a 8 litros de una solución a 60% para obtener una solución al 40%.

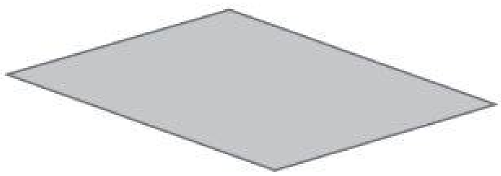
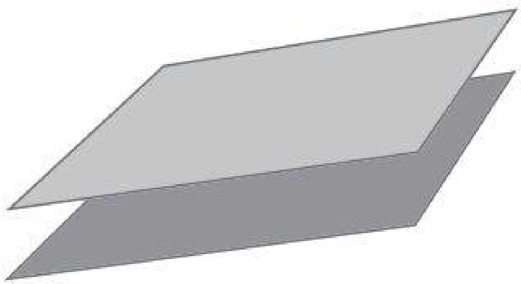
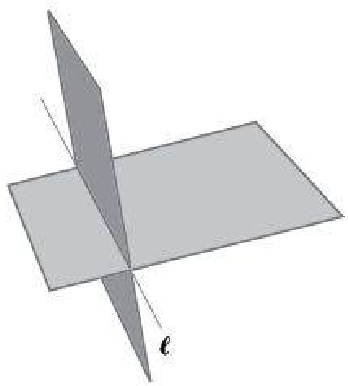
10. Una tienda de electrónica marca cada artículo con un sobreprecio del 60%, ¿cuál es el precio al mayoreo de una televisión que cuesta $5600?

Lección 2

Sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables

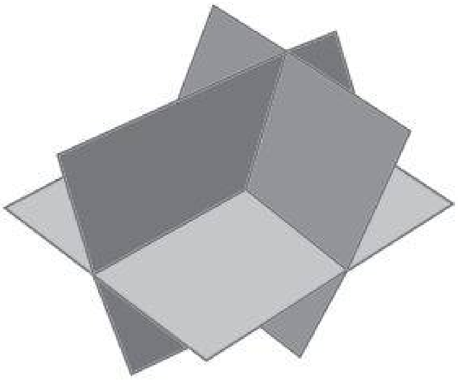
PRODUCTO

A continuación te mostramos representaciones de objetos geométricos; se ha descrito la primera figura para que te sirva como apoyo. Acompáñate de dos de tus compañeros para describir las figuras que se muestran al contestar las preguntas de cada sección.

Representación de la figura geométrica	Descripción
	Es la representación plana de una figura geométrica que se encuentra en el espacio; específicamente se trata de un plano, el cual se extiende en dos dimensiones.
	¿Cuántos planos se muestran en la figura? ______ Describe la relación que existe entre los planos. ______ ______ ______
	En la figura se han representado dos planos. ¿Qué relación existe entre los planos? ______ ______ ______ ¿Qué relación existe entre los planos y la recta ℓ? ______ ______ ______

(*Continúa*)

(*Continuación*)

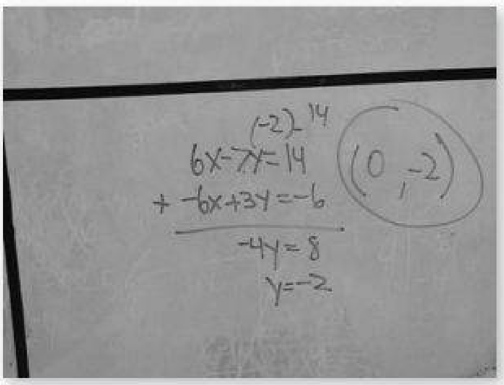
	¿Cuántos planos se muestran en la figura? ______________________________ Describe la relación que existe entre los planos. ______________________________ ______________________________ ¿Existe algún elemento común entre los planos? ______________________________ ______________________________

Sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas (2×2)

Ejemplo

Las edades de dos hermanos suman 32 años y su diferencia es de dos años. ¿Cuántos años tiene cada hermano?

El problema que hemos puesto como ejemplo puede ser resuelto utilizando ecuaciones simultáneas; para determinarlas, asignaremos x a la edad del hermano mayor y y a la edad del hermano menor. La relación entre las cantidades determina un par de ecuaciones.



$$x + y = 32$$
$$x - y = 2$$

El par de ecuaciones que determinamos a partir del problema tiene características que es necesario destacar.

1. Las literales en las dos ecuaciones poseen el mismo valor en ambas ecuaciones; es decir, x vale lo mismo en la primera ecuación que en la segunda, y lo mismo sucede con y.

2. Las ecuaciones son distintas, ya que representan dos situaciones diferentes, donde intervienen las mismas incógnitas.

En general, en esta sección estamos interesados en resolver sistemas de ecuaciones que tengan la forma:

$$a_1x + b_1y = k_1$$
$$a_2x + b_2y = k_2$$

a_1, a_2, b_1, b_2, k_1 y k_2 son número reales.

Existen distintos métodos para resolver un sistema de ecuaciones: los analíticos, los numéricos y el gráfico.

Explicaremos los distintos métodos como un conjunto de pasos generales, sin perder de vista la pertinencia de utilizar alguno de ellos, de acuerdo con las circunstancias que rodeen el problema.

Uno de los primeros registros de ecuaciones simultáneas aparece en el antiguo Egipto.

Método de sustitución

El método que estudiaremos en esta sección se basa en el principio de sustitución, una propiedad que estudiamos en las primeras lecciones.

Método de sustitución
1. Tomamos una de las ecuaciones, para despejar una de las literales.
2. El valor de la literal, despejada en el paso anterior, se sustituye en la otra ecuación, con lo que obtenemos una ecuación de primer grado con una variable.
3. Despejamos la incógnita en la nueva ecuación.
4. Sustituimos el valor de la incógnita despejada en la expresión que obtuvimos en el primer paso para determinar el valor de la otra variable.

Ejemplo 1

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{aligned}3x-5y&=-1\\5x+2y&=19\end{aligned}$.

1. Tomamos la segunda ecuación y despejamos la literal y.

$$\begin{aligned}5x+2y&=19\\2y&=19-5x\\y&=\frac{19-5x}{2}\end{aligned}$$

2. Sustituimos y en la primera ecuación, por el principio de sustitución.

$$\begin{aligned}3x-5y&=-1\\3x-5\left(\frac{19-5x}{2}\right)&=-1\end{aligned}$$

3. Despejamos el valor de x en la ecuación; en principio eliminaremos el paréntesis por la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}3x-5y&=-1\\3x-\frac{95-25x}{2}&=-1\end{aligned}$$

En vista de que la ecuación tiene fracciones, las eliminaremos multiplicando los dos miembros de la ecuación. Recuerda que es mejor utilizar expresiones equivalentes que no contengan fracciones para disminuir el trabajo aritmético que se requiere.

$$2\left(3x-\frac{95-25x}{2}\right)=(-1)2$$
$$6x-\frac{190-50x}{2}=-2$$

Al efectuar la división, debemos cuidar que lo expresado en la ecuación se mantenga; en el primer miembro se encuentra expresada una diferencia, es decir, la resta; por lo tanto, utilizaremos un paréntesis para mantener la condición de la ecuación.

$$6x-\frac{190-50x}{2}=-2$$
$$6x-(95-25x)=-2$$
$$6x-95+25x=-2$$
$$31x=-2+95$$
$$31x=93$$
$$x=\frac{93}{31}$$
$$x=3$$

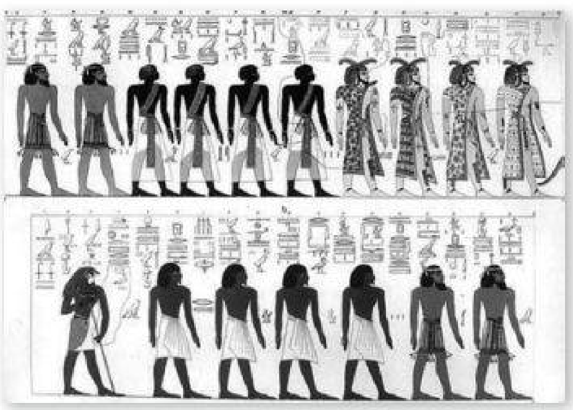
4. Ahora sustituimos el valor que obtuvimos en la ecuación del paso 1 para encontrar el valor de y.

$$y=\frac{19-5(3)}{2}$$
$$y=\frac{4}{2}$$
$$y=2$$

El resultado del sistema de ecuaciones es $x=3$ y $y=2$

Comprobación:

$$3x-5y=-1 \qquad 5x+2y=19$$
$$3(3)-5(2)=-1 \qquad 5(3)+2(2)=19$$
$$9-10=-1 \qquad 15+4=19$$
$$-1=-1 \qquad 19=19$$



Los egipcios utilizaron el método de doble posición para resolver sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 2

Determinar el valor de las incógnitas en el sistema de ecuaciones $\begin{matrix} 2x+3y=-9 \\ x=3y \end{matrix}$.

Como ya mencionamos, no en todas las ecuaciones es necesario ocupar los pasos descritos en este método; en el sistema que resolveremos, se debe observar que en la segunda ecuación ya se encuentra despejado el valor de x; por lo tanto, empezaremos a partir del segundo paso.

1. El primer paso se omite, ya que tenemos el valor de x despejado:

$$x=3y$$

2. Sustituimos el valor despejado en la primera ecuación:

$$2(3y)+3y=-9$$

3. Ahora despejamos el valor de la incógnita en esta ecuación:

$$\begin{aligned} 2(3y)+3y&=-9 \\ 6y+3y&=-9 \\ 9y&=-9 \\ y&=\frac{-9}{9} \\ y&=-1 \end{aligned}$$

4. Para determinar el valor de la otra incógnita, sustituimos el valor que obtuvimos en el paso anterior en la ecuación del primer paso:

$$\begin{aligned} x&=3y \\ x&=3(-1) \\ x&=-3 \end{aligned}$$

Las incógnitas del sistema son $x=-3$ y $y=-1$.

Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=-9 \\ 2(-3)+3(-1)&=-9 \\ -6-3&=-9 \\ -9&=-9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x&=3y \\ -3&=3(-1) \\ -3&=-3 \end{aligned}$$

El método egipcio de solución de sistemas de ecuación fue utilizado hasta mediados del siglo XV.

Método de igualación

El método de igualación se basa en la propiedad transitiva de la igualdad, aquella que dice:

Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Nuevamente daremos algunos pasos generales.

Método de igualación
1. Tomamos una de las ecuaciones y despejamos una de las incógnitas de la ecuación.
2. Despejamos la misma literal en otra ecuación del sistema.
3. Por la propiedad transitiva de la igualdad, podemos igualar las dos literales despejadas en cada ecuación.
4. La ecuación que obtuvimos en el paso anterior es de primer grado con una variable; en ella, despejamos el valor de la incógnita que tiene.
5. Por último, sustituimos el valor de la literal que encontramos en alguna de las ecuaciones que se obtuvo en el primero o segundo pasos.

Ejemplo 1

Determinar el valor de las incógnitas en el sistema de ecuaciones $\begin{aligned}3x - 2y &= 16\\ 5x + 4y &= 12\end{aligned}$.

1. Despejamos x en la primera ecuación.

$$\begin{aligned}3x - 2y &= 16\\ 3x &= 16 + 2y\\ x &= \frac{16 + 2y}{3}\end{aligned}$$

2. En vista de que despejamos x en la primera ecuación, haremos lo mismo en la segunda.

$$\begin{aligned}5x + 4y &= 12\\ 5x &= 12 - 4y\\ x &= \frac{12 - 4y}{5}\end{aligned}$$

3. Por la propiedad transitiva de la igualdad y por las características propias de los sistemas de ecuaciones, podemos igualar las literales y las expresiones que encontramos en los pasos anteriores.

$$x = x$$

$$\frac{16 + 2y}{3} = \frac{12 - 4y}{5}$$

4. La ecuación que obtuvimos en el paso anterior es de primer grado con una variable. Para encontrar una ecuación equivalente sin fracciones multiplicaremos ambos miembros por el mínimo común múltiplo y después despejaremos la incógnita.

$$\frac{16+2y}{3}=\frac{12-4y}{5}$$
$$15\left(\frac{16+2y}{3}\right)=\left(\frac{12-4y}{5}\right)15$$
$$\frac{240+30y}{3}=\frac{180-60y}{5}$$
$$80+10y=36-12y$$
$$10y+12y=36-80$$
$$22y=-44$$
$$y=\frac{-44}{22}$$
$$y=-2$$

5. Sustituimos en alguna de las ecuaciones que se obtuvieron del paso 1 o del 2, por ahora ocuparemos la primera ecuación.

$$x=\frac{16+2y}{3}$$
$$x=\frac{16+2(-2)}{3}$$
$$x=\frac{16-4}{3}$$
$$x=\frac{12}{3}$$
$$x=4$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x=4$ y $y=-2$.

Comprobación:

$$3x-2y=16 \qquad\qquad 5x+4y=12$$
$$3(4)-2(-2)=16 \qquad\qquad 5(4)+4(-2)=12$$
$$16=16 \qquad\qquad 12=12$$

El método egipcio es numérico de aproximaciones, conocido como método de doble posición.

Ejemplo 2

Resuelve el sistema formado por las ecuaciones $3x + y = 22$ y $3x + 4y = 25$.

Es conveniente tratar de determinar las condiciones que tiene la ecuación, de manera que éstas puedan estar a nuestro favor; si lo haces bien, el sistema de ecuaciones se resolverá de una forma sencilla.

En el sistema que pretendemos resolver, el coeficiente de la incógnita y es 1; por lo tanto, es sencillo despejar esa literal, comparado con el esfuerzo de despejar x en la primera ecuación.

1. Tomamos la primera ecuación y despejamos el valor de y.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 22 \\ y &= 22 - 3x \end{aligned}$$

2. En la segunda ecuación, deberemos despejar la misma literal que despejamos en la primera de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 25 \\ 4y &= 25 - 3x \\ y &= \frac{25 - 3x}{4} \end{aligned}$$

3. Por la propiedad transitiva de la igualdad, igualamos las y despejadas.

$$\begin{aligned} y &= y \\ 22 - 3x &= \frac{25 - 3x}{4} \end{aligned}$$

4. La ecuación que acabamos de obtener es de primer grado con una variable, por lo que despejaremos su incógnita.

$$\begin{aligned} 4(22 - 3x) &= \left(\frac{25 - 3x}{4}\right)4 \\ 88 - 12x &= \frac{100 - 12x}{4} \\ 88 - 12x &= 25 - 3x \\ 88 - 25 &= -3x + 12x \\ 63 &= 9x \\ 9x &= 63 \\ x &= \frac{63}{9} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

5. Sustituimos el valor de la literal que encontramos en alguna de las ecuaciones que obtuvimos en los pasos 1 o 2, ahora lo haremos en la expresión del paso 2.

$$\begin{aligned} y &= \frac{25 - 3(7)}{4} \\ y &= \frac{4}{4} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 7$ y $y = 1$.

$$3(7) + (1) = 22 \qquad 3(7) + 4(1) = 25$$
$$22 = 22 \qquad 25 = 25$$

Uno de los primeros registros de sistemas de ecuaciones: papiro de Rhind, 1650 a.C.

Método de eliminación

El método de eliminación se basa en la propiedad aditiva de la igualdad, que en este texto mencionamos como propiedad de suma de la igualdad, lo que nos permite sumar cantidades iguales a los dos miembros de la igualdad.

Método de eliminación

La parte importante del método de eliminación es que busques en el sistema coeficientes simétricos en la misma literal, por ejemplo, si se tiene el término 9x en una ecuación, se espera que se obtenga de alguna manera –9x en la otra ecuación.

En caso de que la ecuación tenga todos sus coeficientes distintos, es necesario que multipliques los dos miembros de una de las ecuaciones, de manera que se generen los números simétricos.

Si el sistema ya cumple con la condición mencionada, entonces se observan los siguientes pasos:

1. Se suman los miembros de las dos ecuaciones, de manera que se elimine una de las incógnitas y se forme una nueva ecuación.
2. Despejamos la ecuación que tenemos de manera que obtengamos el valor de una de las literales.
3. Se sustituye el valor de la incógnita que encontramos en el paso anterior y despejamos la literal que hace falta encontrar.

Ejemplo 1

Determinar el valor de las incógnitas en el sistema de ecuaciones $\begin{matrix} 3x+4y=23 \\ 5x-4y=17 \end{matrix}$.

En el caso del sistema de ecuaciones que mostramos en este primer ejemplo, cumple con la condición mencionada, es decir, tiene números simétricos en los coeficientes de la misma literal (el término $4y$ y su simétrico $-4y$), por lo que podemos seguir los pasos del método de eliminación.

1. Sumamos las ecuaciones, de manera que se sumen los términos semejantes.

$$\begin{array}{l} 3x+4y=23 \\ \underline{5x-4y=17} \\ 8x \qquad =40 \end{array}$$

2. Despejamos para determinar el valor de la literal en la ecuación que obtuvimos.

$$\begin{aligned} 8x &= 40 \\ x &= \frac{40}{8} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

3. Sustituimos el valor que obtuvimos en una de las ecuaciones originales para determinar la segunda literal.

$$\begin{aligned} 3(5)+4y &= 23 \\ 15+4y &= 23 \\ 4y &= 8 \\ y &= \frac{8}{4} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} 3(5)+4(2) &= 23 \qquad & 5(5)-4(2) &= 17 \\ 23 &= 23 & 17 &= 17 \end{aligned}$$

Ruinas de Luxor, Egipto, lugar en que fue encontrado uno de los primeros registros de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{matrix} 3x-5y=11 \\ 7x+10y=4 \end{matrix}$.

El sistema que intentamos resolver no presenta números simétricos en las literales, por lo que buscaremos multiplicar alguna de ellas por un número, de manera que se cumpla con dicha condición. Es importante que busques números que resulte sencillo multiplicar y que aproveches las características del sistema.

Multiplicaremos la primera ecuación por 2; observa que al hacer esto, aprovechamos que los coeficientes de y tienen signos distintos.

$$\begin{gathered} 3x-5y=11 \\ 2(3x-5y)=(11)2 \\ 6x-10y=22 \end{gathered}$$

Ahora formaremos un nuevo sistema de ecuaciones, en el que sustituiremos la primera ecuación por la que obtuvimos.

$$\begin{matrix} 3x-5y=11 \\ 7x+10y=4 \end{matrix}$$

Sistema que pretendemos resolver

Cambiamos el sistema por otro que es equivalente al anterior

$$\begin{matrix} 6x-10y=22 \\ 7x+10y=4 \end{matrix}$$

Es posible utilizar los pasos que forman el método.

1. Sumamos las ecuaciones de manera que obtenemos una nueva ecuación.

$$\begin{array}{r} 6x-10y=22 \\ \underline{7x+10y=4} \\ 13x \qquad =26 \end{array}$$

2. Despejamos la última ecuación que obtuvimos.

$$\begin{aligned} x&=\frac{26}{13} \\ x&=2 \end{aligned}$$

3. Ahora sustituimos el valor de la literal encontrada en una de las ecuaciones y despejamos la incógnita que hace falta determinar.

*Papiro de Ebers, los egipcios utilizaban escritura **hierática** para escribir matemática.*

$$
\begin{aligned}
7(2)+10y &= 4\\
14+10y &= 4\\
10y &= 4-14\\
10y &= -10\\
y &= \frac{-10}{10}\\
y &= -1
\end{aligned}
$$

La solución del sistema es $x=2$ y $y=-1$

Ejemplo 3

Determinar la solución del sistema $\begin{matrix} 4x-5y=-47 \\ x+6y=39 \end{matrix}$.

En este caso, es conveniente multiplicar las dos ecuaciones, debido a las características del sistema; por ejemplo, la primera ecuación multiplicada por 6 y la segunda por −5, permitirán obtener términos útiles para aplicar el método.

$$
\begin{aligned}
6(4x-5y) &= (-47)6\\
5(x+6y) &= (39)(5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
24x-30y &= -282\\
5x+30y &= 195
\end{aligned}
$$

Sustituimos el sistema de ecuaciones que pretendemos resolver por su equivalente.

$\begin{matrix} 4x-5y=-47 \\ x+6y=39 \end{matrix}$ Cambiamos el sistema por otro que es equivalente al anterior $\Rightarrow$ $\begin{matrix} 24x-30y=-282 \\ 5x+30y=195 \end{matrix}$

1. Sumamos las ecuaciones para determinar una ecuación simplificada con una incógnita.

$$
\begin{array}{rl}
24x-30y &= -282\\
5x+30y &= 195\\
\hline
29x \qquad &= -87
\end{array}
$$

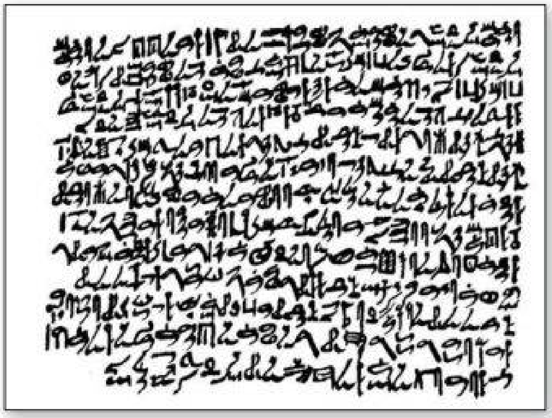
2. Despejamos la ecuación que obtuvimos en la ecuación anterior y obtenemos:

$$x = \frac{-87}{29}$$
$$x = -3$$

3. Sustituimos el valor de la literal que obtuvimos en alguna de las ecuaciones que formaban el sistema y despejamos la incógnita que hace falta determinar.

$$\begin{aligned} 4(-3) - 5y &= -47 \\ -12 - 5y &= -47 \\ -5y &= -47 + 12 \\ -5y &= -35 \\ y &= \frac{-35}{-5} \\ y &= 7 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = -3$ y $y = 7$.



Escritura hierática, utilizada por los egipcios para describir ideas matemáticas.

Ejemplo 4

Determinar la solución del sistema $\begin{matrix} 4x - 5y = -47 \\ x + 6y = 39 \end{matrix}$.

Vamos a resolver la misma ecuación del ejemplo anterior, pero esta vez lo haremos de forma diferente. Multiplicaremos la segunda ecuación por –4, ya que al hacerlo obtenemos coeficientes con números simétricos en la literal x.

$$-4(x + 6y) = (39)(-4)$$
$$-4x - 24y = -156$$

$$\begin{matrix} 4x - 5y = -47 \\ x + 6y = 39 \end{matrix}$$

Cambiamos el sistema por otro que es equivalente al anterior

$$\begin{matrix} 4x - 5y = -47 \\ -4x - 24y = -156 \end{matrix}$$

Observa que el proceso permite que las cantidades utilizadas sean pequeñas; tiene mayor dificultad trabajar con el nuevo sistema de ecuaciones.

1. Sumamos las ecuaciones de forma que obtengamos una ecuación con una sola literal.

$$\begin{array}{r} 4x-5y=-47 \\ \underline{-4x-24y=-156} \\ -29y=-203 \end{array}$$

2. Ahora despejamos la ecuación simplificada.

$$y=\frac{-203}{-29}$$
$$y=7$$

3. Sustituimos el valor de la incógnita en alguna de las ecuaciones y despejamos la otra literal.

$$x+6(7)=39$$
$$x+42=39$$
$$x=39-42$$
$$x=-3$$

Observa que obtenemos el mismo resultado utilizando el método de eliminación de distinta forma.

LO QUE APRENDÍ

I. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tres veces, haciendo uso de un método distinto en cada ocasión. Recuerda que en las tres ocasiones debes obtener el mismo resultado.

1. $\begin{array}{l} x+5y=9 \\ 2x+3y=11 \end{array}$

2. $\begin{array}{l} 4x+3y=8 \\ 2x+y=2 \end{array}$

3. $\begin{array}{l} 2x-y=5 \\ 4x+5y=31 \end{array}$

4. $\begin{array}{l} 8x+3y=1 \\ 4x-3y=23 \end{array}$

5. $\begin{array}{l} 2x-7y=39 \\ 6x+5y=-13 \end{array}$

6. $\begin{aligned} 4x - 5y &= 11 \\ 3x + 10y &= -33 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 5x - 8y &= 41 \\ 2x + 7y &= -55 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3x - 8y &= 11 \\ 3x + 4y &= -1 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 2x - 3y &= -3 \\ 5x - 6y &= 28 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 5x + 4y &= 18 \\ 7x - 2y &= 27 \end{aligned}$

II. Determina si los sistemas de ecuaciones son consistentes, inconsistentes o está formada por ecuaciones equivalentes.

1. $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x - y &= -5 \\ 3x + y &= -5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4x - y &= 5 \\ 4x - y &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 2x - 2y &= 4 \\ 5x - 5y &= 10 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 3x + y &= 9 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= -5 \end{aligned}$

8. $\begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ x - y = 3 \end{array}$

9. $\begin{array}{l} x - y = 5 \\ 2x - 2y = 10 \end{array}$

10. $\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x - y = 9 \end{array}$

Lección 3

Situaciones que se resuelven con sistema de ecuaciones de primer grado con dos variables

Gabriel Cramer (1704–1752) estudió un método numérico de solución de sistemas de ecuaciones.

Método numérico (método por determinantes)

En el método numérico se hacen las mismas operaciones que en el método de sustitución, ya que el primero es una abreviación del segundo; la ventaja que tienes al utilizar el método numérico es que no se ocupan las literales, es decir, sólo los coeficientes de la ecuación.

Para utilizar el método numérico es necesario que pongamos atención a los coeficientes del sistema de ecuaciones; por ello, volveremos a una expresión dada en la lección 2. Un sistema de ecuaciones tiene la forma:

$$\begin{array}{c} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{array}$$

Definiremos tres determinantes, que son posibles obtener de esta expresión.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} = k_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot k_2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot k_2 - k_1 \cdot a_2$$

La solución del sistema se obtiene por literales, x se encuentra al dividir el determinante de x (Δx) entre el determinante general (Δ), y y se encuentra si dividimos el determinante de y (Δy) entre el determinante general (Δ).

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), llamado el niño genio, descubre un método numérico para la solución de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{matrix} 3x-2y=10 \\ 4x+5y=21 \end{matrix}$.

Para ocupar el método numérico es necesario que encontremos el valor de los determinantes, lo cual haremos de esta forma:

El determinante general.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5)-(-2)(4) = 15+8 = 23$$

El determinante de x.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 21 & 5 \end{vmatrix} = (10)(5)-(-2)(21) = 50+42 = 92$$

El determinante de y.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 21 \end{vmatrix} = (3)(21)-(10)(4) = 63-40 = 23$$

Para determinar los valores de las incógnitas, dividimos los determinantes en el orden que establecimos.

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{92}{23} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{23}{23} = 1$$

La solución del sistema es $x = 4$ y $y = 1$.

Comprobación:

$$\begin{aligned} 3x-2y &= 10 \\ 3(4)-2(1) &= 10 \\ 12-2 &= 10 \\ 10 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x+5y &= 21 \\ 4(4)+5(1) &= 21 \\ 16+5 &= 21 \\ 21 &= 21 \end{aligned}$$

LO QUE APRENDÍ

I. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de determinantes.

1. $\begin{aligned} x + 5y &= 9 \\ 2x + 3y &= 11 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x + 3y &= 8 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 4x + 5y &= 31 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 8x + 3y &= 1 \\ 4x - 3y &= 23 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x - 7y &= 39 \\ 6x + 5y &= -13 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 4x - 5y &= 11 \\ 3x + 10y &= -33 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 5x - 8y &= 41 \\ 2x + 7y &= -55 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= -5 \end{aligned}$

   a) ¿Cómo interpretas el resultado de este sistema desde el punto de vista numérico? ______________________________

   b) Compara las ecuaciones de este ejercicio y las del ejercicio 7 de la lección anterior. Concluye qué sucede con este sistema de ecuaciones.

   ____

   ____

9. $\begin{aligned} 2x - 2y &= 4 \\ 5x - 5y &= 10 \end{aligned}$

   a) ¿Cómo interpretas el resultado de este sistema desde el punto de vista numérico? ______________________________

   b) Compara las ecuaciones de este ejercicio y las del ejercicio 4 de la lección anterior. Concluye qué sucede con este sistema de ecuaciones.

   ____

   ____

Situaciones que se resuelven haciendo uso de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos variables

Ejemplo 1

Determinar dos números que sumen 82 y su diferencia sea igual a 12.

x es el número mayor.
y es el número menor.

Entonces, las ecuaciones que representan el problema son:

$$x + y = 82$$
$$x - y = 12$$

Utilizamos el método numérico para resolver este sistema. Para ello, determinamos los distintos determinantes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = -1 - 1 = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 82 & 1 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = (82)(-1) - (1)(12) = -82 - 12 = -94$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 82 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = (1)(12) - (82)(1) = 12 - 82 = -70$$

Para determinar las incógnitas, hay que dividir los determinantes de las literales entre el determinante general.

$$x = \frac{-94}{-2} = 47$$

$$y = \frac{-70}{-2} = 35$$

Los números que buscamos son 47 y 35.

Ejemplo 2

La diferencia en el precio de renta mensual de dos departamentos es de \$800.00. Si el arrendador obtuvo en el presente año \$21,200 y, además, el departamento más caro estuvo desocupado dos meses, ¿qué precio tiene cada departamento?

x representa la renta del departamento de mayor costo.
y representa la renta del departamento económico.

La ecuación que podemos obtener de forma inmediata resulta de la diferencia de los precios.

$$x - y = 800$$

Para obtener la segunda ecuación, determinamos la cantidad que se recibe por la renta multiplicando el número de meses que se ocupa el departamento por el costo de éste al mes.

$10x$ es la cantidad que recibiríamos por los meses que estuvo rentado el primer departamento.

$12y$ representa la cantidad que recibiríamos por el departamento más barato.

La cantidad de dinero que recibimos por los departamentos es:

$$10x + 12y = 21{,}200$$

Entonces, el sistema de ecuaciones que se debe resolver es $\begin{aligned} x - y &= 800 \\ 10x + 12y &= 21{,}200 \end{aligned}$.

Resolveremos la ecuación por alguno de los métodos estudiados, suponiendo que elegimos el método de eliminación, debemos multiplicar la primera ecuación por 12, buscando que los coeficientes de y sean simétricos.

$$\begin{aligned} 12(x - y) &= (800)\,12 \\ 12x - 12y &= 9{,}600 \end{aligned}$$

1. Sumamos las ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 12x - 12y = 9{,}600 \\ \underline{10x + 12y = 21{,}200} \\ 22x \qquad = 30{,}800 \end{array}$$

2. Despejamos la literal en la nueva ecuación.

$$\begin{aligned} x &= \frac{30{,}800}{22} \\ x &= \$1{,}400 \end{aligned}$$

3. Sustituimos en la primera ecuación del sistema para obtener la otra literal.

$$\begin{aligned} x - y &= 800 \\ 1{,}400 - y &= 800 \\ -y &= 800 - 1{,}400 \\ -y &= -600 \\ -1(-y) &= (-600)(-1) \\ y &= \$600 \end{aligned}$$

Las rentas mensuales por los departamentos son de \$1,400 y \$600, respectivamente. La comprobación queda a cargo del estudiante.

Ejemplo 3

José gasta 55 pesos en la compra de 17 estampillas postales. Algunas le costaron \$2.60 y otras \$3.50. ¿Cuántas estampillas de cada tipo compró?

La ecuación que podríamos obtener de forma inmediata es la relacionada con el número de estampillas, ya que:

x es el número de estampillas de \$2.60.
y es el número de estampillas de \$3.50.

$$x + y = 17$$

Nuevamente los costos se determinan multiplicando el número de estampillas por el costo de cada una de ellas.

$2.60x$ es la cantidad que se pagó por las estampillas de \$2.60.
$3.50y$ es la cantidad que se pagó por las estampillas de \$3.50.

El pago costo total lo podemos expresar a través del sistema.

$$\begin{aligned} x + y &= 17 \\ 2.60x + 3.50y &= 55.00 \end{aligned}$$

Aunque podríamos utilizar cualquier método, ejemplificaremos el procedimiento de resolución de este problema utilizando el método de igualación.

1. Despejamos x en la primera ecuación.

$$x = 17 - y$$

2. Como despejamos x en la primera ecuación, despejamos x en la segunda.

$$x = \frac{55.00 - 3.50y}{2.60}$$

3. Igualamos las expresiones equivalentes de x:

$$\begin{aligned} x &= x \\ 17 - y &= \frac{55.00 - 3.50y}{2.60} \end{aligned}$$

4. Despejamos la incógnita y de la nueva expresión.

$$\begin{aligned} 44.2 - 2.6y &= 55 - 3.5y \\ 0.9y &= 10.8 \\ y &= \frac{10.8}{0.9} \\ y &= 12 \end{aligned}$$

5. Sustituimos el valor encontrado para conocer el valor faltante en la expresión que obtuvimos en el paso 1.

$$x = 17 - 12$$
$$x = 5$$

José compró 5 y 12 estampillas de \$2.60 y \$3.50, respectivamente.

Timbre postal en el que se aprecia a Maximiliano. Tenía un valor de 13 centavos. Grabado en 1866.

LO QUE APRENDÍ

I. Resuelve cada uno de los siguientes problemas; considera que es posible que en algunos de ellos no conozcas la temática que se trata en ellos; en caso necesario, efectúa una pequeña investigación al respecto.

1. La suma de dos números naturales es 50 y su diferencia 25. Determina su valor.
2. La suma de dos números es 15 y su diferencia es 9. Determina su valor.
3. El perímetro de un rectángulo mide 26 metros y uno de sus lados es 3 metros más largo que el otro. ¿Cuáles son sus dimensiones?
4. Una persona recibe \$9,000 por la renta de dos casas. Si las rentas difieren en \$100 y la más barata estuvo desocupada dos meses. ¿Cuál era la renta de cada una de ellas?
5. En una colecta se recabaron \$13,000; si aportaron 700 personas y cada uno de ellos aportó \$10 o \$25, indique cuántas personas aportaron de cada cantidad.
6. Un contratista tiene trabajando a 45 obreros en una construcción; si los obreros que construyen la parte A son el doble de los que hacen la parte B, ¿cuántos obreros trabajan en cada parte?

Lección 4

Características de los sistemas de ecuaciones lineales 3×3

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones cuyas variables deben de satisfacer las condiciones planteadas simultáneamente. Un sistema de ecuaciones se representa como:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n
\end{gathered}
$$

Un sistema así expresado tiene n ecuaciones y n incógnitas, donde a_{ij} son números reales llamados **coeficientes del sistema** (los subíndices ij representan el número de fila y el número de columna, respectivamente); los valores de c_n son números reales, llamados **términos independientes** del sistema; las incógnitas x_j son las **variables** del sistema y la **solución del sistema** es un conjunto ordenado de números reales $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, tales que al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ las n ecuaciones del sistema se convierten en verdaderas. Al conjunto $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ se le conoce también como **conjunto solución**.

Sistemas de ecuaciones 3 × 3

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas siempre se puede escribir de la forma:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3
\end{cases}
$$

O como comúnmente se encuentra en muchos textos para simplificar el manejo de los coeficientes y de las variables:

$$
\begin{cases}
a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z = d_3
\end{cases}
$$

Para resolver sistemas de ecuaciones de 3 × 3 se tienen diferentes métodos de solución, algunos numéricos y otros analíticos (algebraicos), que son generalizaciones de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas estudiadas antes y que se abordarán ampliamente en la lección 5 de este bloque.

Método numérico (por determinantes)

El método de Cramer, también conocido como la Regla de Cramer, lo estudiamos en la lección 3 como método de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704–1752). Este método es muy eficiente para resolver sistemas de ecuaciones lineales no muy grandes; para sistemas mayores a 3 × 3 es más eficiente utilizar la eliminación gaussiana.

El método consiste, como ya lo vimos, en trabajar sobre los coeficientes de las ecuaciones que forman el sistema. De esta manera, dado un sistema 3 × 3:

$$
\begin{cases}
a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\
a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\
a_3x + b_3y + c_3z = d_3
\end{cases}
$$

El determinante general se obtiene al colocar los coeficientes de cada ecuación y cada incógnita en lo que se llama arreglo matricial:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Una manera que puede ayudarte a calcular el determinante general ( ), asociado a dicha matriz, se obtiene agregando las dos primeras filas en la parte inferior como sigue:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Se realiza la suma de los productos en dirección ↘ a los cuales se resta la suma de los productos de dirección ↙

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3), \text{ o bien,}$$
$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Para obtener la solución del sistema, también se deben conocer los determinantes x, y, z, los cuales pueden obtenerse de la misma manera, pero reemplazando la columna de la variable correspondiente por los términos independientes, según corresponda.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

De esta manera, la solución del sistema está dada por:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Ejemplo

Determinar el valor de las incógnitas en el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ -x + 2y - z = -6 \\ x + y + x = 3 \end{cases}$$

Como vimos, es necesario calcular los distintos determinantes para poder así encontrar el valor de las incógnitas.

Para determinar el valor del determinante general es necesario que hagamos un arreglo con los coeficientes de las incógnitas, el cual será de la siguiente forma.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Para encontrar fácilmente el determinante, recurrimos a un proceso nemotécnico como se indica a continuación:

Los primeros dos renglones del arreglo los colocamos en la parte inferior, de manera que formemos un nuevo arreglo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Para encontrar el valor del determinante, es necesario hacer dos tipos de operaciones: sumas de productos y diferencias de productos.

La suma de productos necesaria para determinar el valor del determinante se obtiene al multiplicar en diagonales de izquierda a derecha.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (3)(2)(1) + (-1)(1)(1) + (1)(-1)(-1)$$

Restaremos una serie de productos, los cuales resultan de multiplicar en diagonal de derecha a izquierda.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (3)(2)(1) + (-1)(1)(1) + (1)(-1)(-1) - (1)(2)(1) - (-1)(1)(3) - (1)(-1)(-1)$$

Ahora es posible encontrar el valor del determinante efectuando las operaciones que se encuentran indicadas. Recuerda que cuando en una operación se encuentran involucradas multiplicaciones, sumas y restas, primero se realizan las multiplicaciones.

$$\Delta = (3)(2)(1) + (-1)(1)(1) + (1)(-1)(-1) - (1)(2)(1) - (-1)(1)(3) - (1)(-1)(-1)$$
$$\Delta = 6 - 1 + 1 - 2 + 3 - 1$$
$$\Delta = 6$$

El determinante de x (Δx) es un arreglo de números semejantes al determinante general (Δ), pero en el que se sustituyen los coeficientes de x por los términos independientes.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Para determinar su valor, agregamos los primeros renglones en la parte inferior del arreglo, sumamos las multiplicaciones que surjan de los números colocados diagonalmente de izquierda a derecha y restamos las multiplicaciones de los números colocados diagonalmente de derecha a izquierda.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = (7)(2)(1) + (-6)(1)(1) + (3)(-1)(-1) - (1)(2)(3) - (-1)(1)(7) - (1)(-1)(-6)$$
$$\Delta x = 14 - 6 + 3 - 6 + 7 - 6$$
$$\Delta x = 6$$

El determinante de y (Δy) es un arreglo de números semejante al determinante general (Δ), pero en el que se sustituyen los coeficientes de y por los términos independientes.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Para determinar su valor, agregamos los primeros renglones en la parte inferior del arreglo, sumamos las multiplicaciones que surjan de los números colocados diagonalmente de izquierda a derecha y restamos las multiplicaciones de los números colocados diagonalmente de derecha a izquierda.

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = (3)(-6)(1) + (-1)(3)(1) + (1)(7)(-1) - (1)(-6)(1) - (-1)(3)(3) - (1)(7)(-1)$$
$$\Delta y = -18 - 3 - 7 + 6 + 9 + 7$$
$$\Delta y = -6$$

Para encontrar el determinante de z repetimos el proceso que enunciamos en los determinantes anteriores, sólo recuerda que el determinante de z (Δz) es parecido al determinante general.

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = (3)(2)(3) + (-1)(1)(7) + (1)(-1)(-6) - (7)(2)(1) - (-6)(1)(3) - (3)(-1)(-1)$$
$$\Delta z = 18 - 7 + 6 - 14 + 18 - 3$$
$$\Delta z = 18$$

Ahora sólo se calculan las soluciones del sistema:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{18}{6} = 3$$

$$x = 1 \qquad y = -1 \qquad z = 3$$

LO QUE APRENDÍ

I. Resuelve los siguientes sistemas por el método de determinantes.

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 5x + y + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y - 4z = -2 \\ -2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 5y - z = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - 2y - z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x - 2y - 2z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}$

Lección 5

Sistemas de ecuaciones lineales 3 × 3. Métodos algebraicos

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, podemos hacer uso de los métodos algebraicos, como son el de suma y resta, igualación o sustitución. El cuadro de la página siguiente muestra de manera simultánea cómo es posible ocupar dichos métodos en este tipo de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = -1 & \textit{Ecuación } (1) \\ x + 2y - z = 9 & \textit{Ecuación } (2) \\ 3x - y + z = -2 & \textit{Ecuación } (3) \end{cases}$$

En cualquiera de los tres métodos que se presentan a continuación, la situación general es que se usa una de las dos ecuaciones sobre las otras dos, con la finalidad de formar dos nuevas ecuaciones equivalentes, pero con dos incógnitas, con lo que el problema se reduce a un sistema más pequeño.

Por suma y resta	Por igualación	Por sustitución
Utilizaremos (2) para eliminar x de (1) y (3). Multiplicamos (2) por −2 y la sumamos a (1): $(-2)\ (x+2y-z=9)$ $-2x-4y+2z=-18$ $2x+y+3z=-1$ $-3y+5z=-19 \ldots (4)$ Multiplicamos (2) por (−3) y la sumamos a (3): $(-3)\ (x+2y-z=9)$ $-3x-6y+3z=-27$ $3x-y+z=-2$ $-7y+4z=-29 \ldots (5)$ Con (4) y (5) se forma un sistema 2×2: $-3y+5z=-19 \ldots (4)$ $-7y+4z=-29 \ldots (5)$ Multiplicamos (4) por 7, (5) por −3 y las sumamos: $(7)\ (-3y+5z=-19)$ $(-3)(-7y+4z=-29)$ $-21y+35z=-133$ $21y-12z=87$ $23z=-46$ De donde $z=-2$ Para obtener y basta sustituir z en (4) o en (5): $-3y+5(-2)=-19$ $-3y-10=-19$ $-3y=-9$ $y=3$ x se obtiene sustituyendo y y z en (1), (2) o (3): $x+2(3)-(-2)=9$ $x+6+2=9$ $x+8=9$ $x=1$ De esta manera las soluciones el sistema son: $x=1 \quad y=3 \quad z=-2$ Las soluciones se pueden comprobar sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones ordinales y verificando que se hacen verdaderas.	Despejaremos la misma varible en (1) y (2), así como en (1) y (3) e igualaremos respectivamente. Despejando y en (1) y (2): $y=-1-2x-3z \ldots (1)$ $y=\frac{9+z-x}{2} \ldots (2)$ Igualamos los despejes: $-1-2x-3z=\frac{9+z-x}{2}$ $-3x-7z=11 \ldots (4)$ Despejando y en (1) y (3): $y=-1-2x-3z \ldots (1)$ $y=3x+z+2 \ldots (3)$ Igualamos los despejes: $-1-2x-3z=3x+z+2$ $-5x-4z=3 \ldots (5)$ Una vez formadas las ecuaciones (4) y (5) tenemos un sistema 2×2 $-3x-7z=11 \ldots (4)$ $-5x-4z=3 \ldots (5)$ El cual podemos resolver también por igualación: Despejamos x en (4) y (5) e igualando tenemos: $\frac{11+7z}{-3}=\frac{3+4z}{-5}$ $-55-35z=-9-12z$ $-23z=46$ $z=-2$ Sustituimos z en (5) obtenemos x: $-5x-4(-2)=3$ $-5x+8=3$ $-5x=-5$ $x=1$ Sustituimos x y z en (1) para obtener y. $2(1)+y+3(-2)=-1$ $2+y-6=-1$ $y-4=-1$ $y=3$ Con lo que se confirman las soluciones obtenidas con el método anterior.	En este caso despejamos y en (3) y la sustituimos en (1) y (2). $y=3x+z+2 \ldots (3)$ Sustituyendo en (1) $2x+(3x+z+2)+3z=-1$ $5x+4z=-3 \ldots (4)$ Sustituyendo en (2) $x+2(3x+z+2)-z=9$ $7x+z=5 \ldots (5)$ Una vez formadas la ecuaciones (4) y (5) como resultado de las sustituciones se forma el sistema 2 x 2: $5x+4z=-3 \ldots (4)$ $7x+z=5 \ldots (5)$ El cual resolveremos por el mismo método. Despejamos z en (5): $z=5-7x$ y la sustituimos en (4): $5x+4(5-7x)=-3$ $5x+20-28x=-3$ $-23x=-23$ $x=1$ Sustituyendo x en (5) obtenemos z. $7(1)+z=5$ $7+z=5$ $z=-2$ Sustituimos x y z en (3) para obtener y. $3(1)-y+(-2)=-2$ $3-y-2=-2$ $3=y$ Como se puede observar el método de sustitución también nos lleva al mismo resultado.

La elección de un método u otro para la resolución de un sistema de ecuaciones 3×3 depende, en algunos casos, de criterios personales, ya que en ocasiones somos más hábiles en alguno de ellos; o bien, las circunstancias ameritan el uso de alguno en particular. Un criterio que puede ser útil es el tipo de números que sean los coeficientes que acompañan a las incógnitas; si los números son enteros, y no muy grandes, es posible decir que cualquier método es eficiente. De hecho, los métodos numéricos se facilitan mucho.

En el caso de que entre los coeficientes haya fracciones, se pueden realizar operaciones para convertir las ecuaciones en otras equivalentes, pero con coeficientes enteros, o bien, si se desea resolver utilizando los coeficientes fraccionarios, se deberá proceder con mayor cuidado. Ahora, si entre los coeficientes hubiera números de orden mayor a 10, también un método algebraico puede reducir el rango de error.

LO QUE APRENDÍ

I. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por métodos algebraicos:

a) $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ -x+y+2z=-2 \\ 3x-y-2z=1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+3y-2z=1 \\ -4x+2y-2z=5 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} y+2x=0 \\ y-5z=1 \\ z+3x=-2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 3x+y-z=0 \\ 2x+4y+z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ z+y=0 \\ z+4x-y=0 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} +2y-z=1 \\ -8y+\frac{3}{2}z=-\frac{17}{3} \\ +2y-z=0 \end{cases}$ *i)* $\begin{cases} 5x+6y-z=0 \\ 10x+2z=2 \\ x+\frac{4}{5}y=\frac{1}{5} \end{cases}$

II. Resuelve los siguientes problemas:

1. La suma de los dígitos de un número de tres cifras es 6. Si se intercambian los dígitos de las centenas y las decenas, el número resultante es 90 unidades mayor que el número original. Si se intercambian los dígitos de las decenas y las unidades, el número resultante es nueve unidades mayor que el número original. ¿Cuál es el número?

2. Entre Armando, Beatriz y Carlos tienen \$140. Armando cuenta con el doble de pesos que Carlos. También Armando tiene \$10 más que Beatriz. ¿Cuánto posee cada uno?

3. Si Juan le da un dulce a Pedro, ambos tendrían los mismos dulces; si Daniel tuviera un dulce menos, tendría lo mismo que Pedro, y si Juan tuviera cinco dulces más, tendría tanto como el doble de dulces de lo que tiene Pedro. ¿Cuántos dulces tiene cada uno?

4. Si al doble de la edad de Aurora se le suma la edad de Bernardo, se obtiene la edad de Dora aumentada en 32 años. Si a la edad de Bernardo le sumamos seis veces la de Dora, obtenemos el triple de la de Aurora aumentada en 27 años. La suma de las edades de Aurora y Bernardo es igual a tres veces la de Dora, disminuida en tres años. ¿Qué edad tiene cada uno?

5. Compré un carro, un caballo y sus arreos de juguete por $200. El carro y los arreos costaron $20 más que el caballo, mientras que el caballo y los arreos costaron $40 más que el carro. ¿Cuánto costaron el carro, el caballo y los arreos?

6. Hallar tres números tales que la suma del 1o. y el 2o. exceda en 18 al 3o.; la suma del 1o. y el 3o. exceda en 78 al 2o. y la suma del 2o. y el 3o. exceda en 102 al primero.

7. Un jugador vació sobre la mesa su caja de cerillos, distribuyéndolas en tres montones.
¿Se dispone usted a hacer hogueras? —bromearon los presentes.

—El rompecabezas —explicó— será con base en cerillos. Tenemos tres montones diferentes. En ellos hay en total 48 cerillos. No les digo cuántas hay en cada uno, pero observen lo siguiente: si del primer montón paso al segundo tantos cerillos como hay en éste, luego del segundo paso al tercero tantos cerillos como hay en este tercero y, por último, del tercero paso al primero tantos cerillos como existen ahora en ese primero, resulta que habrá el mismo número de cerillos en cada montón. ¿Cuántos cerillos había en cada montón inicialmente?

Tomada de Wikimedia Foundation.

8. El salario promedio de Guillermo, Roberto y Juan es de $8200. El salario promedio de Roberto y Guillermo es de $8000. El salario de Guillermo y Juan es de $8100. Determina el salario mensual de cada uno.

9. Los propietarios de un centro comercial, en el que el 70% del área se empleaba para estacionamiento de automóviles, compraron un terreno adyacente, dedicando 85% del mismo a estacionamiento y el resto a edificios. El área así aumentada alcanzó un total de 30,000 m^2, 75% de lo cual se destinó a estacionamiento de automóviles. Determina el área original del centro comercial y el área del terreno comprado.

10. Cuatro hermanos tienen 45 pesos. Si el dinero del primero es aumentado en 2 pesos, el del segundo reducido en 2 pesos, se duplica el del tercero y el del cuarto se reduce a la mitad, todos los hermanos tendrían la misma cantidad. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Bloque IV Ecuaciones cuadráticas

Lección 1

Ecuaciones cuadráticas en una variable

Información complementaria

- En la página http://www.1728.com/quadratc.htm encontrarás un programa que te permite escribir los coeficientes de los términos que forman una ecuación cuadrática, y conocer sus soluciones; intenta reconstruir las ecuaciones dadas sus soluciones.
- Para analizar la influencia que tienen los parámetros de la función cuadrática, utilizaremos un software llamado GeoGebra, que puedes descargar e instalar desde la siguiente página: http://www.geogebra.org/cms/

Características de las ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas de segundo grado con una variable son un tipo especial de ecuación polinomial que tiene la forma estándar o general.

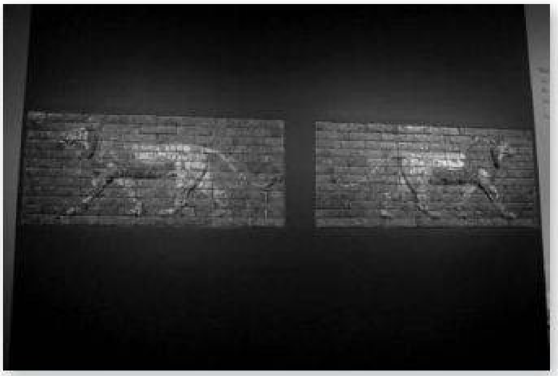
$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

donde:

ax^2 = el término cuadrático.
bx = el término lineal.
c = el término independiente.

Las ecuaciones cuadráticas pueden ser completas o incompletas; completas cuando tienen los tres términos que hemos mencionado.

Cuando una ecuación cuadrática, completa o incompleta, igualada a cero se encuentra ordenada (empezando por el término cuadrático, luego el lineal y por último el término independiente) decimos que se encuentra en su forma estándar.



En Babilonia aparece uno de los primeros registros sobre ecuaciones cuadráticas.

Una ecuación cuadrática está *incompleta* cuando al darle la forma estándar le hace falta el término lineal o el término independiente, lo que significa que hay dos tipos de ecuaciones cuadráticas incompletas: a las que les hace falta el término lineal y a las que les hace falta el término independiente. Entonces, podemos decir que estudiaremos ecuaciones cuadráticas incompletas con las formas:

$$ax^2 + bx = 0$$
$$ax^2 + c = 0$$

La matemática Babilónica consistía en un conjunto de descripciones sobre cómo resolver problemas.

El término cuadrático no puede faltar, ya que si esto sucediera, entonces la ecuación sería de primer grado con una variable.

En este texto explicaremos dos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas: el método analítico y el método gráfico. En la presente sección trabajaremos con el método analítico.

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Método de factorización para ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$
La condición necesaria es que la ecuación cuadrática sea de la forma $ax^2 + bx = 0$; es decir, que le falte el término independiente. 1. Factorizamos la expresión del primer miembro de la igualdad por el factor común. 2. Utilizamos la propiedad que enunciamos como: "si $a \in R$, entonces $a \cdot 0 = 0$", para indicar que alguno de los factores es igual a cero. 3. Despejamos cada factor para encontrar el valor de la incógnita.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $4x^2 - 8x = 0$.

Lo primero que debemos observar es que la ecuación presenta la forma estándar o general; por lo tanto, es posible utilizar los pasos del método descrito

1. El factor común del primer miembro de la igualdad es $4x$, por lo que la ecuación la podremos escribir como:

$$4x^2 - 8x = 0$$
$$4x(x-2) = 0$$

2. Debido a que todo número multiplicado por cero es igual a cero, entonces algunos de los factores de la ecuación son cero (propiedad enunciada como: si $a \in R$, entonces $a \cdot 0 = 0$).

$$4x = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad x - 2 = 0$$

3. En el paso anterior encontramos dos ecuaciones de primer grado, ahora despejamos la incógnita de cada una de ellas.

$$x = \frac{0}{4} \qquad x = 0 + 2$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

La ecuación cuadrática tiene dos resultados, $x = 0$ o $x = 2$.

Babilonios y egipcios mantenían los conocimientos matemáticos en un grupo reducido de sacerdotes. El sarcófago que se muestra fue de un gran sacerdote egipcio.

Comprobación:
En el caso de las ecuaciones cuadráticas, debido a que tienen dos resultados, es necesario hacer dos comprobaciones, una por cada solución.

Para $x_1 = 0$

$$4x^2 - 8x = 0$$
$$4(0)^2 - 8(0) = 0$$
$$0 - 0 = 0$$
$$0 = 0$$

Para $x_2 = 2$

$$4x^2 - 8x = 0$$
$$4(2)^2 - 8(2) = 0$$
$$4(4) - 8(2) = 0$$
$$16 - 16 = 0$$
$$0 = 0$$

Descripción matemática en el papiro de Rhind, los egipcios conocían y resolvían ecuaciones cuadráticas de una variable.

Ejemplo 2

Determinar el valor de la incógnita en la ecuación $2x^2 - 8 = -5x - 8$.

La ecuación no cumple con la condición enunciada para utilizar el método, por lo que debemos igualar a cero para determinar la forma estándar de la ecuación; para ello, emplearemos el método de transposición que vimos en el bloque III.

$$2x^2 - 8 = -5x - 8$$
$$2x^2 - 8 + 5x + 8 = 0$$
$$2x^2 + 5x + 0 = 0$$
$$2x^2 + 5x = 0$$

La ecuación que hemos obtenido se encuentra expresada en su forma general, pero ahora podemos afirmar que es *incompleta*, ya que le falta el término independiente. Utilizaremos el método de factorización por término común que estamos estudiando.

1. Factorizamos el primer término de la ecuación por el factor común.

$$x(2x + 5) = 0$$

2. En vista de que x y $(2x - 5)$ se están multiplicando y el resultado es cero, entonces algunos de ellos deben ser cero.

$$x_1 = 0 \qquad 2x + 5 = 0$$

3. Ahora despejamos la incógnita en la segunda ecuación.

$$2x + 5 = 0$$
$$2x = 0 - 5$$
$$x_1 = 0 \qquad 2x = -5$$
$$x_2 = -\frac{5}{2}$$

Comprobación:

Para $x_1 = 0$

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 8 &= -5x - 8 \\
2(0)^2 - 8 &= -5(0) - 8 \\
2(0) - 8 &= -5(0) - 8 \\
0 - 8 &= 0 - 8 \\
-8 &= -8
\end{aligned}
$$

Para $x_2 = -\frac{5}{2}$.

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 8 &= -5x - 8 \\
2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 8 &= -5\left(-\frac{5}{2}\right) - 8 \\
\frac{2}{1}\left(\frac{25}{4}\right) - 8 &= -5\left(-\frac{5}{2}\right) - 8 \\
\frac{50}{4} - 8 &= \frac{25}{2} - 8 \\
\frac{50-32}{4} &= \frac{25-16}{2} \\
\frac{18}{4} &= \frac{9}{2} \\
\frac{9}{2} &= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

LO QUE APRENDÍ

François Viète (1540 – 1630) resuelve ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grados utilizando, por primera vez, una metodología formal.

I. Determina la solución de cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

1. $x^2 - 6x = 0$	**6.** $8x^2 - 12x = 0$
2. $x^2 - 7x = 0$	**7.** $9x^2 - 24x = 0$
3. $x^2 + 8x = 0$	**8.** $6x - x^2 = 0$
4. $x^2 + 11x = 0$	**9.** $5x^2 = 60x$
5. $10x^2 - 40x = 0$	**10.** $4x = 6x^2$

Modo para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$

Como en todos los casos de ecuaciones cuadráticas, es necesario que primero obtengamos la forma estándar para determinar de qué tipo de ecuación se trata, si es completa o incompleta. Para reconocer las ecuaciones cuadráticas que estudiaremos en esta sección, se requiere que le haga falta el término lineal cuando se encuentre expresada en su forma estándar.

Las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + c = 0$ se resuelven utilizando el método de transposición.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 - 16 = 0$.

La ecuación que estamos resolviendo tiene la forma estándar y le hace falta el término lineal; por lo tanto, podemos despejarla utilizando el método de transposición.

$$x^2 - 16 = 0$$
$$x^2 = 0 + 16$$
$$x^2 = 16$$

Para eliminar el cuadrado, obtendremos la raíz cuadrada de cada miembro de la igualdad.

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}$$
$$x = \pm 4$$

Por lo que la ecuación tiene como soluciones $x_1 = 4$ y $x_2 = -4$.

Shulba Sutras *es un libro hindú, de 800 a.C., que describe la construcción de altares haciendo uso de herramientas matemáticas.*

Nota: La **raíz cuadrada** de un número x es aquel número que multiplicado por sí mismo es x.

Por ejemplo, las raíces cuadradas de 9 son 3 y -3; es decir, $\sqrt{9} = \pm 3$.
Lo anterior se debe a que $(3)^2 = (3)(3) = 9$ y $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $4x^2 - 5 = 0$.

Esta ecuación ya tiene la forma general, por lo que es posible empezar a despejarla.

$$4x^2 - 5 = 0$$
$$4x^2 = 0 + 5$$
$$4x^2 = 5$$
$$x^2 = \frac{5}{4}$$

Nuevamente, para determinar el valor de x es necesario obtener la raíz cuadrada de cada uno de los miembros de la igualdad.

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Podemos expresar la solución de dos formas; la primera es expresar la operación sin efectuarla (sólo presentarla). Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

El símbolo ≈ indica que las cantidades que relaciona están aproximadas; es distinto del símbolo = que indica total identidad.

La otra forma de expresar el resultado es obteniendo la raíz cuadrada de 5 y utilizar decimales aproximados.

$$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x \approx \pm\frac{2.2360}{2}$$

$$x \approx \pm 1.1180$$

El resultado de la ecuación es aproximadamente $x_1 \approx 1.1180$ y $x_2 \approx -1.1180$.

Los matemáticos prefieren expresar el resultado con radicales por la exactitud que implica; además, permite realizar operaciones y análisis precisos. Por otro lado, científicos e ingenieros prefieren el resultado aproximado, ya que facilita su uso en la construcción, el diseño, la industria, etcétera.

Comprobación:

Para efectuar la comprobación es necesario que utilicemos el resultado expresado como operación, lo que nos permite observar claramente que la solución proporcionada mantiene la igualdad al ser sustituida en la ecuación. Recuerda que se requiere realizar dos comprobaciones.

Para $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$4x^2 - 5 = 0$$

$$4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 5 = 0$$

$$4\left(\frac{\sqrt{5}^2}{2^2}\right) - 5 = 0$$

La raíz cuadrada y el cuadrado de un número son operaciones contrarias; por lo tanto, es posible eliminar la raíz y el cuadrado sin afectar al mismo número al que se aplican simultáneamente estas dos operaciones.

$$\frac{4}{1}\left(\frac{5}{4}\right) - 5 = 0$$

$$\frac{20}{4} - 5 = 0$$

$$5 - 5 = 0$$

$$0 = 0$$

Para $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$4x^2 - 5 = 0$$
$$4\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 5 = 0$$
$$4\left[\frac{\left(-\sqrt{5}\right)^2}{2^2}\right] - 5 = 0$$
$$\frac{4}{1}\left(\frac{5}{4}\right) - 5 = 0$$
$$\frac{20}{4} - 5 = 0$$
$$5 - 5 = 0$$
$$0 = 0$$

Los hindús utilizaban muchas herramientas matemáticas, sin embargo, no hacían comprobaciones.

LO QUE APRENDÍ

I. Determina el valor de la incógnita en cada una de las ecuaciones cuadráticas.

1. $x^2 - 25 = 0$
2. $x^2 - 121 = 0$
3. $9x^2 - 36 = 0$
4. $81x^2 - 49 = 0$
5. $x^2 + 36 = 0$
6. $4x^2 + 81 = 0$
7. $49x^2 + 4 = 0$
8. $100x^2 = 1$
9. $x^2 = 49$
10. $100 = x^2$

Solución de ecuaciones cuadráticas por el método de *completar un trinomio cuadrado perfecto*

Completar un trinomio cuadrado perfecto es un método general que nos permite resolver ecuaciones cuadráticas de cualquier tipo y consiste en transformar una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

A la forma:

$$(x + A)^2 = B$$

Para lograr este cambio de expresión es necesario que recuerdes que existen dos tipos de trinomios cuadrados perfectos que permiten lograr lo anterior: la suma de dos términos al cuadrado y la diferencia de dos términos al cuadrado.

$$(x+m)^2 = x^2+2mx+m^2$$
$$(x-m)^2 = x^2-2mx+m^2$$

De manera que si deseamos completar un trinomio cuadrado perfecto en una expresión del tipo x^2+bx le sumamos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, de forma que sea posible llegar a la igualdad.

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

Método de completar un trinomio cuadrado perfecto
Es necesario destacar que para ocupar el método de completar un trinomio cuadrado perfecto la ecuación cuadrática debe reunir las siguientes características: I. Debe presentar la forma estándar; es decir, igualada a cero. II. El coeficiente del término cuadrático debe ser uno. III. La ecuación debe estar ordenada de mayor a menor término; es decir, al leer de izquierda a derecha el primer término es el cuadrático, el segundo es el término lineal y el último es el término independiente. Para llevar a cabo el método, debemos realizar los siguientes pasos: 1. El término independiente de la ecuación lo despejamos al primer miembro de la igualdad, de manera que la ecuación presente la forma: $$x^2+bx=-c$$ 2. Obtenemos un número utilizando la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. 3. Sumamos el número encontrado a los dos miembros de la igualdad, de manera que la ecuación tenga la forma: $$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$ 4. Factorizamos en el primer miembro de la igualdad y simplificamos en el segundo miembro. La forma de la ecuación es entonces: $$\left(x+A\right)^2 = B$$ 5. Despejamos la literal en la ecuación que haya quedado como resultado de los pasos anteriores.

Recordemos que los pasos que hemos enunciado no son generales; es decir, habrá algunas ecuaciones cuadráticas que presenten características que es posible modificar o alterar en algo la forma de abordar el método. A continuación explicamos algunos ejemplos en los que se hace el uso del método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 1

Determinar el valor de la incógnita en la ecuación $x^2 - 12x + 32 = 0$.

1. Como primer paso es necesario que el término independiente de la ecuación se despeje al segundo miembro de la igualdad.

$$x^2 - 12x + 32 = 0$$
$$x^2 - 12x = 0 - 32$$
$$x^2 - 12x = -32$$

2. El coeficiente del término lineal es $b = -12$, por lo que determinamos el valor de un número que permita completar un trinomio cuadrado perfecto a partir de la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-12}{2}\right)^2 = (-6)^2 = 36$$

3. Por la propiedad de la suma de la igualdad, es posible sumar en los dos miembros de la igualdad el número que hemos encontrado.

$$x^2 - 12x + 36 = -32 + 36$$

4. Factorizamos el primer miembro y simplificamos en el segundo.

$$(x-6)^2 = 4$$

5. Eliminamos el cuadrado utilizando raíz cuadrada en los dos miembros de la igualdad.

$$\sqrt{(x-6)^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x - 6 = \pm 2$$

Ahora podemos determinar el valor de la incógnita al transponer el -6 al segundo miembro de la igualdad.

$$x = \pm 2 + 6$$
$$x_1 = 2 + 6 \qquad x_2 = -2 + 6$$
$$x_1 = 8 \qquad x_2 = 4$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $2x^2 = 15 - x$.

Debido a que la ecuación que vamos a resolver no tiene la forma estándar es necesario que de manera inicial se iguale a cero la ecuación.

$$2x^2 = 15 - x$$
$$2x^2 + x - 15 = 0$$

La ecuación cuadrática aún no cumple las condiciones necesarias para utilizar el método, por lo que dividiremos los dos miembros de la ecuación entre dos para que el coeficiente del término cuadrático sea igual a uno; es decir, $a = 1$.

$$\frac{2x^2 + x - 15}{2} = \frac{0}{2}$$
$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{2} = 0$$

La ecuación ahora cumple con las propiedades necesarias para utilizar el método, por lo que procedemos a aplicar los pasos.

1. Despejamos al segundo miembro de la igualdad el término independiente.

$$x^2+\frac{1}{2}x=0+\frac{15}{2}$$
$$x^2+\frac{1}{2}x=\frac{15}{2}$$

2. Determinamos el valor del número que necesitamos sumar utilizando la expresión $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

3. Por la propiedad aditiva de la igualdad, es posible sumar el mismo número a los dos miembros de la ecuación.

$$x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\frac{15}{2}+\frac{1}{16}$$

4. Factorizando en el primer miembro y simplificando en el segundo.

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{120+1}{16}$$
$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$$

5. Despejamos la literal en la ecuación que tenemos; hay que tener especial cuidado en considerar que la operación inversa de un cuadrado es la raíz cuadrada y que éstas tienen dos resultados, uno positivo y uno negativo.

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{121}{16}}$$
$$x+\frac{1}{4}=\pm\frac{11}{4}$$
$$x=\pm\frac{11}{4}-\frac{1}{4}$$

$$x_1=\frac{11}{4}-\frac{1}{4} \qquad x_2=-\frac{11}{4}-\frac{1}{4}$$
$$x_1=\frac{10}{4} \qquad x_2=-\frac{12}{4}$$
$$x_1=\frac{5}{2} \qquad x_2=-3$$

La ecuación tiene dos soluciones $x_1=\frac{5}{2}$ y $x_2=-3$.

I. Resuelve cada una de las ecuaciones que se muestran a continuación utilizando el método para completar el trinomio cuadrado perfecto.

1. $x^2 - 4x - 5 = 0$
2. $x^2 - 8x + 15 = 0$
3. $x^2 + 4x - 5 = 0$
4. $x^2 + 8 = 6x$
5. $3x^2 = 11x + 4$
6. $4x^2 - 25 = 0$ (*Nota*: observa que $4x^2 - 25 = 4x^2 + 0x - 25$)
7. $x^2 - 6x + 34 = 0$
8. $x^2 - 10x + 61 = 0$
9. $x^2 + 4x + 5 = 0$
10. $4x^2 + 4x + 17 = 0$

Método de factorización

Para utilizar el método de factorización, es necesario identificar lo siguiente:

- El tipo de factorización de que se trata.
- Qué técnica es adecuada para factorizar.
- *Aplicar la propiedad del producto cero* que nos dice que si dos números multiplicados tienen como producto cero, entonces alguno de los factores es cero.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $25x^2 - 16 = 0$.

La ecuación se encuentra en su forma estándar, por lo que es posible abordar el método de solución directamente.

Identificar el tipo de factorización: observamos que el primer miembro de la igualdad se puede expresar como una diferencia de cuadrados.

$$25x^2 - 16 = 0$$
$$(5x)^2 - (4)^2 = 0$$
$$a^2 - b^2$$

Seleccionar de la técnica adecuada para factorizar: las diferencias de cuadrados se pueden factorizar como diferencias de cuadrados; es decir, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$(5x)^2 - (4)^2 = 0$$
$$(5x-4)(5x+4) = 0$$

Aplicar la propiedad del producto cero. Sabemos que en una multiplicación que tiene como producto cero, alguno de sus factores es igual a cero, por lo que hay dos posibilidades.

$$5x - 4 = 0 \text{ o } 5x + 4 = 0$$

Despejamos la literal en las posibilidades, con lo que obtenemos los resultados de la ecuación.

$$5x = 0 + 4 \qquad\qquad 5x = 0 - 4$$
$$5x = 4 \qquad\qquad 5x = -4$$
$$x_1 = \frac{4}{5} \qquad\qquad x_2 = -\frac{4}{5}$$

La ecuación tiene como soluciones: $x_1 = \frac{4}{5}$ y $x_2 = -\frac{4}{5}$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

La ecuación se encuentra en su forma estándar, por lo que procedemos a *identificar el tipo de factorización*; es posible ver que si multiplicamos por dos la raíz cuadrada del término cuadrático y el independiente se obtiene el valor absoluto del término lineal.

$$2\sqrt{4x^2}\sqrt{25} = 20x$$
$$2(2x)(5) = 20x$$
$$20x = 20x$$

Seleccionar la técnica adecuada para factorizar; por la condición que cumple la expresión algebraica, que contiene la ecuación cuadrática, sabemos que se trata de un trinomio cuadrado perfecto y que puede ser factorizado como la diferencia de dos términos al cuadrado; es decir, $a^2 + 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$
$$(2x-5)^2 = 0$$

Sabemos que en una multiplicación que tiene como producto cero, alguno de sus factores es igual a cero, por lo que hay dos posibilidades.

$$2x - 5 = 0 \text{ o } 2x - 5 = 0$$

Despejamos la incógnita en cada una de las ecuaciones que hemos formado.

$$2x = 0 + 5 \qquad\qquad 2x = 0 + 5$$
$$2x = 5 \qquad\qquad 2x = 5$$
$$x_1 = \frac{5}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{5}{2}$$

La ecuación tiene una solución $x = \frac{5}{2}$.

Ejemplo 3

Determinar el valor de la incógnita en la ecuación $x^2 = 5x + 14$.

Es necesario que igualemos la ecuación a cero para que presente la forma estándar.

$$x^2 = 5x + 14$$
$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

Identificar el tipo de factorización: el primer miembro de la igualdad es un trinomio, que no es perfecto, y tiene como primer coeficiente el uno; por lo tanto, es posible que se pueda factorizar como $x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$, de manera que $m + n = b$ y $m \cdot n = c$.

Selección de la técnica adecuada para factorizar: determinamos los números que nos permiten cumplir con la propiedad que ya mencionamos; ya encontrados, procedemos a factorizar el primer miembro de la igualdad.

$$\underline{-7} + \underline{2} = -5$$
$$(\underline{-7})(\underline{2}) = -14$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$
$$(x-7)(x+2) = 0$$

Igualamos cada factor a cero y despejamos cada ecuación.

$$x - 7 = 0 \qquad\qquad x + 2 = 0$$
$$x = 0 + 7 \qquad\qquad x = 0 - 2$$
$$x_1 = 7 \qquad\qquad x_2 = -2$$

La ecuación cuadrática tiene como soluciones: $x_1 = 7$ y $x_2 = -2$.

LO QUE APRENDÍ

I. Determina el valor de la incógnita de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 10x + 21 = 0$
2. $x^2 - 12x + 31 = 0$
3. $x^2 + 6x = 7$
4. $3x^2 + 4 = 13x$
5. $4x^2 = 4x + 15$
6. $x^2 + 2x + 2 = 0$
7. $9x^2 - 16 = 0$
8. $3x^2 - 5x = 0$
9. $9x^2 = 9x + 10$

II. La ecuación 6 no es posible resolverla por factorización; utiliza otro método expuesto en el texto y explica a qué se debe.

Lección 2

Situaciones que se resuelven mediante ecuaciones cuadráticas de una variable

PRODUCTO

Para resolver problemas es necesario tener especial cuidado de comprender la información que dan los datos, así como la manera en que se relacionan las cantidades conocidas y las desconocidas. En el caso de las ecuaciones cuadráticas, te recomendamos tomes en cuenta las características de la ecuación y utilices el método que resulte más sencillo en su solución.

Ejemplo 1

El producto de dos números naturales es 48 y su diferencia es 8. Encontrar los números.

Empezamos por representar los números desconocidos.

x es el número mayor.
y es el número natural menor.

La relación que resulta evidente es la diferencia de los números; la podemos expresar como $x - y = 8$; debido a ello, es posible representar el número mayor como:

$$x = 8 + y$$

El producto de los números naturales es:

$$x \cdot y = 48$$

Ahora sustituimos el valor de x que en la última expresión el valor del número mayor.

$$(8 + y)y = 48$$

La ecuación que acabamos de encontrar permite determinar el número menor que solicita el problema, pero es necesario que determinemos la forma estándar de la ecuación.

$$\begin{aligned} (8 + y)y &= 48 \\ 8y + y^2 &= 48 \\ y^2 + 8y &= 48 \\ y^2 + 8y - 48 &= 0 \end{aligned}$$

Hemos determinado una ecuación cuadrática que está completa, ahora utilizaremos un método de solución, en este caso es conveniente completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$y^2 + 8y = 0 + 48$$
$$y^2 + 8y = 48$$
$$y^2 + 8y + 16 = 48 + 16$$
$$(y+4)^2 = 64$$
$$\sqrt{(y+4)^2} = \pm\sqrt{64}$$
$$y + 4 = \pm 8$$
$$y = \pm 8 - 4$$

$$y = 8 - 4 \qquad\qquad y = -8 - 4$$
$$y_1 = 4 \qquad\qquad y_2 = -12$$

El valor de uno de los números que buscamos es 4; despreciamos el –12, debido a que no es un número natural. Para encontrar el segundo número, sustituimos en la ecuación $x = 8 + y$.

$$x = 8 + 4$$
$$x = 12$$

Los números que buscamos son 12 y 4.

Ejemplo 2

La suma de un número y su recíproco es $\frac{17}{4}$. Encontrar dichos números.

x es el número que buscamos.

$\frac{1}{x}$ es su recíproco.

Ahora escribimos la suma que nos plantea el problema de la siguiente forma:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{17}{4}$$

La ecuación que hemos obtenido resuelve el problema; sin embargo, multiplicaremos por el común denominador los dos miembros de la igualdad para eliminar las fracciones.

$$4x\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{17}{4}\right)4x$$
$$\frac{4x}{1}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{17}{4}\right)\frac{4x}{1}$$
$$4x^2 + \frac{4x}{x} = \frac{68x}{4}$$

Dividimos las fracciones que están expresadas y despejamos para encontrar la forma estándar de la ecuación cuadrática.

$$4x^2 + 4 = 17x$$
$$4x^2 - 17x + 4 = 0$$

Resolveremos la ecuación utilizando el método de factorización.

$$(4x-1)(x-4) = 0$$

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 0 \\ 4x &= 0 + 1 \\ 4x &= 1 \\ x_1 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 4 &= 0 \\ x &= 0 + 4 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Los números que buscamos son 4 y $\frac{1}{4}$.

Comprobación:

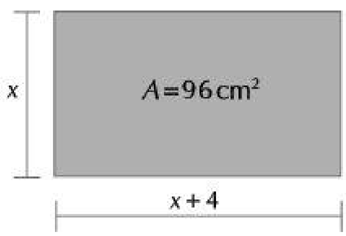
En el caso de las situaciones que se resuelven mediante ecuaciones cuadráticas es indispensable realizar la comprobación; en algunos casos sólo una de las soluciones resuelve el problema, por ello hay que tomar en cuenta las condiciones que el problema solicita para hacer la evaluación de las respuestas.

Para $x_1 = 4$

Su recíproco es $\frac{1}{4}$.

Si sumamos el número y su recíproco, obtenemos $\frac{17}{4}$, como lo solicita el problema.

$$4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$
$$\frac{16+1}{4} = \frac{17}{4}$$
$$\frac{17}{4} = \frac{17}{4}$$



Ejemplo 3

El área de un rectángulo es de 96 cm². Si su largo es 4 cm mayor que su ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

El área de un rectángulo es igual a la base por la altura, es decir, $A = bh$.

$h = x$ (ancho)
$b = x + 4$ (largo)

$$A = bh$$
$$96 = x(x+4)$$

Ahora determinamos la forma general de la ecuación.

$$96 = x^2 + 4x$$
$$x^2 + 4x = 96$$
$$x^2 + 4x - 96 = 0$$

Resolvemos la ecuación haciendo uso del método para completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2 + 4x = 96$$
$$x^2 + 4x + 4 = 96 + 4$$
$$(x+2)^2 = 100$$
$$\sqrt{(x+2)^2} = \pm\sqrt{100}$$
$$x + 2 = \pm 10$$
$$x = \pm 10 - 2$$

$$x_1 = 10 - 2 \qquad\qquad x_2 = -10 - 2$$
$$x_1 = 8 \qquad\qquad x_2 = -12$$

Como las dimensiones del rectángulo deben ser naturales, no se considera el resultado negativo. Entonces el ancho del rectángulo es de 8 cm; para encontrar su largo, sustituimos en la expresión correspondiente.

$$b = x + 4$$
$$b = 8 + 4$$
$$b = 12$$

El ancho y largo del rectángulo miden 8 y 12 cm, respectivamente.

Ejemplo 4

En un río, un bote de excursión demora 1.6 horas más cuando va contra la corriente que de regreso. Si la velocidad de la corriente es de 6 km/h y la distancia que recorre es de 57 km, ¿cuál es la velocidad del bote en aguas tranquilas?

Si consideramos que x es la velocidad del bote en aguas tranquilas, entonces:

$x + 6$ es la velocidad del bote con la corriente a favor.

$x - 6$ es la velocidad del bote con la corriente en contra.

Sabemos que hay una diferencia en el tiempo que tarda el bote en recorrer la distancia, si lleva la corriente a favor o en contra.

Tiempo a favor de la corriente	$-$	Tiempo en contra de la corriente	$=$	1.6

Por otro lado, la velocidad se expresa como $v = \frac{d}{t}$, a partir de la cual podemos encontrar una fórmula que represente el tiempo.

$$v = \frac{d}{t}$$
$$vt = d$$
$$t = \frac{d}{v}$$

La distancia a recorrer es de 57 km, por lo que podemos encontrar dos relaciones que expresen el tiempo con la corriente en contra (t_2) y a favor (t_1).

$$t_2 = \frac{57}{x-6} \qquad\qquad t_1 = \frac{57}{x+6}$$

La diferencia entre los tiempos se expresa como:

$$t_2 - t_1 = 1.6$$
$$\frac{57}{x-6} - \frac{57}{x+6} = 1.6$$

La ecuación que hemos obtenido tiene fracciones; para eliminarlas es necesario multiplicar los dos miembros de la ecuación por el común denominador. (*Nota*: el mínimo común múltiplo en este caso es $(x-6)(x+6)$).

$$(x-6)(x+6)\left[\frac{57}{x-6} - \frac{57}{x+6}\right] = 1.6(x-6)(x+6)$$
$$\frac{57(x-6)(x+6)}{x-6} - \frac{57(x-6)(x+6)}{x+6} = 1.6(x-6)(x+6)$$
$$57(x+6) - 57(x-6) = 1.6(x-6)(x+6)$$

Efectuando las multiplicaciones que se encuentran en la ecuación obtenemos:

$$57x + 342 - 57x + 342 = 1.6(x^2 - 36)$$
$$684 = 1.6x^2 - 57.6$$

La ecuación cuadrática es incompleta, por lo que despejaremos el valor de la literal utilizando el método de transposición.

$$684 + 57.6 = 1.6x^2$$
$$741.6 = 1.6x^2$$
$$\frac{741.6}{1.6} = x^2$$
$$463.5 = x^2$$
$$x^2 = 463.5$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{463.5}$$
$$x \approx \pm 21.52$$

$$x_1 \approx 21.52 \qquad\qquad x_2 \approx -21.52$$

Consideramos que la velocidad del bote en aguas tranquilas es de 21.52 km/h; despreciamos la segunda respuesta de la ecuación por ser negativa.

I. Resuelve cada uno de los siguientes problemas:

1. La suma de dos números es 23 y su producto es 132. Encuentra los números.

2. Encuentra dos números cuya suma sea 31 y su producto 238.

3. Determina dos números cuya diferencia es 13 y su producto 300.

4. La diferencia de dos números es 13 y su producto 30. Determina los números.

5. La suma de un número y su recíproco es $\frac{61}{30}$. Encuéntralos.

6. La suma de un número y su recíproco es $\frac{37}{6}$. Determina su valor.

7. El área de un rectángulo es de 192 unidades cuadradas; si el largo y el ancho tienen una diferencia de cuatro unidades, ¿cuáles son las longitudes de cada uno de sus lados?

8. Si la longitud y el ancho de un rectángulo de 4 x 2 unidades se aumentan en la misma cantidad, el área del nuevo rectángulo medirá el doble de la original, ¿cuáles son las dimensiones del nuevo rectángulo?

9. Un depósito se puede llenar en cuatro horas cuando se utilizan dos tubos, ¿cuántas horas se necesitarán para que cada tubo por si sólo llene el depósito si el de menor diámetro requiere tres horas más que el de mayor diámetro?

10. Una lancha rápida tarda 1 hora más en viajar 38 kilómetros contra la corriente de un río que en el viaje de regreso. Si la lancha viaja 16 km/h en aguas tranquilas, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

Lección 3

Ecuaciones cuadráticas en una variable

Analicen las siguientes situaciones y contesten lo que se solicita.

1. Al utilizar un videoproyector, podemos observar que conforme la distancia entre el mismo y la pared donde se proyecta aumenta, el área proyectada es mayor. La siguiente tabla muestra la relación entre dicha distancia y el área proyectada:

Distancia del proyector a la pared (*m*)	0	1	2	3	4
Área proyectada (m^2)	0	2	8	18	32

a) ¿Cuál será el área proyectada con una distancia de 5 m?

____

Explica tu respuesta:

____

____

____

b) Si consideramos *x* la distancia y *P* el área proyectada, escribe una expresión algebraica que represente la situación:

____

c) ¿Por qué es posible decir que *P* está en función de *x*?

____

____

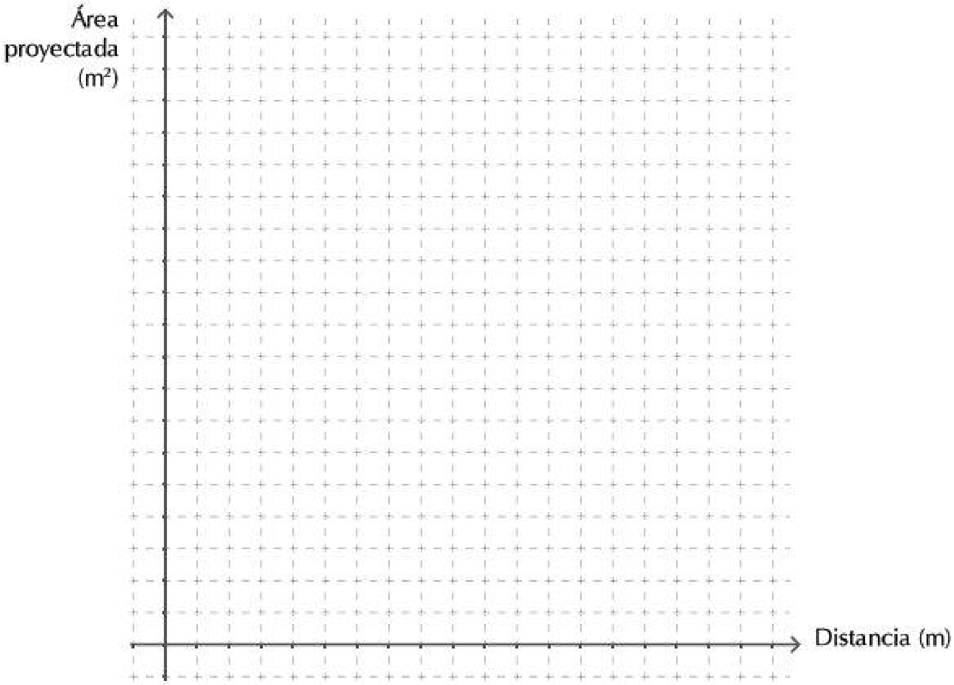
d) Al realizar una proyección, se observó que el área proyectada era de 24.5 m^2. ¿Cuál debe ser la distancia entre el proyector y la pared?

____

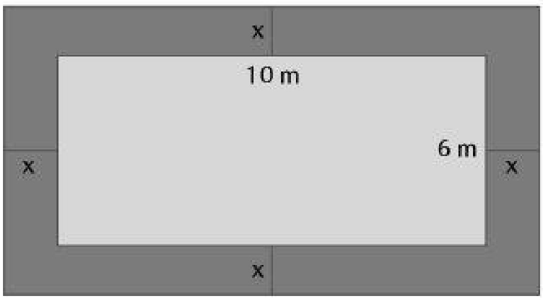
e) Utilizando la expresión propuesta en *c*), ¿cómo obtendrías la distancia?

____

f) En el siguiente plano ubica los valores de la tabla, así como los correspondientes a las distancias 5 m y 6 m.



1. Se quiere hacer un camino alrededor de una alberca rectangular cuyas dimensiones son 10 m × 6 m, como se muestra en la figura, de tal manera que la anchura de todo el camino sea constante en todo el contorno.



a) Si consideramos que la anchura del camino es de 1 m, ¿cuál sería el área del contorno de la alberca?

___

b) Explica cómo lo obtuviste.

___

___

c) Considerando *x* la anchura del contorno de la alberca y A su área, escribe una expresión que demuestre esa relación.

___

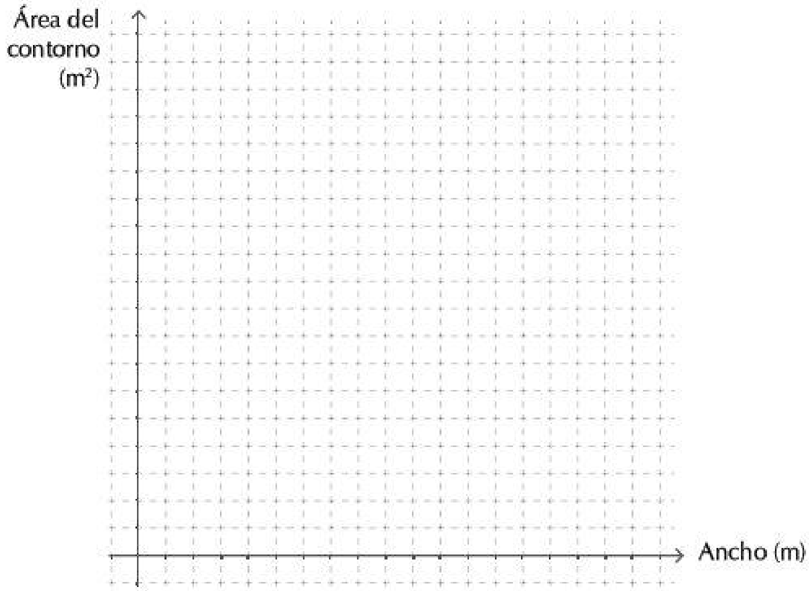
d) ¿Cuál sería el área del contorno si la anchura fuera de 2 m, 3 m y 4 m?

___

e) Si deseáramos colocar una superficie antiderrapante sobre todo el contorno, pero sólo contáramos con material suficiente para cubrir 105 m², ¿cuál debería ser el ancho del contorno?

Utiliza la expresión de *c)* para establecer la ecuación correspondiente.

f) En la siguiente gráfica relaciona la anchura del contorno (x) con su área (A).



Al inicio de este bloque se analizaron algunos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas. Sin embargo, existe otro método que utiliza lo que se conoce como "fórmula general" y que resulta una herramienta para obtener la solución de cualquier ecuación cuadrática completa o incompleta.

Las soluciones de una ecuación son conocidas también como ***raíces de la ecuación***.

Deducción de la fórmula general

Dada la forma general de la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{, con } a \neq 0.$$

Nos auxiliaremos con el método de completar el trinomio cuadrado perfecto, por lo que lo primero será conseguir que el coeficiente de x^2 sea 1; como **a** es distinto de cero, podemos dividir entre **a** cada término de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Restamos el valor del término independiente en ambos miembros de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Para completar el trinomio cuadrado perfecto, o en el miembro izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, por lo que sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo y desarrollamos la operación indicada del derecho:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Extraemos raíz cuadrada en ambos miembros:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$$

Separamos las raíces de la fracción:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{(2a)^2}}$$

Simplificamos el radical del denominador del miembro derecho:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Despejamos la incógnita que buscamos:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Combinamos las fracciones con el mismo denominador del lado derecho; así obtenemos la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A continuación se muestra un ejemplo del uso de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas:

Ejemplo 1

Resolver $x^2+7x-30=0$.

La ecuación tiene la forma general, por lo tanto, es posible determinar el valor de los coeficientes de los términos cuadrático, lineal e independiente.

Donde:

$$a=1$$
$$b=7$$
$$c=-30$$

Al sustituir los valores en la fórmula y desarrollar las operaciones, tenemos:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(-30)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+120}}{2}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{2}$$

$$x = \frac{-7 \pm 13}{2}$$

Para obtener los resultados, se procede por separado.

$$x_1 = \frac{-7+13}{2} \qquad x_2 = \frac{-7-13}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} \qquad x_2 = \frac{-20}{2}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -10$$

Recuerda que es necesario hacer dos comprobaciones, una por cada solución que hemos obtenido.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $6x^2 + 5x - 4 = 0$.

Nuevamente la ecuación cuadrática tiene la forma general, por lo que es posible determinar los valores de los términos cuadrático, lineal e independiente.

$$a = 6 \qquad b = 5 \qquad c = -4$$

Sustituimos estos valores en la fórmula general, para la solución de ecuaciones de segundo grado.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x \frac{(-5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(6)(-4)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{12}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{12}$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{12}$$

$$x_1 = \frac{-5+11}{12} \qquad x_2 = \frac{-5-11}{12}$$

$$x_1 = \frac{6}{12} \qquad x_2 = \frac{-16}{12}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{-4}{3}$$

Tipo de soluciones de ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes

Dada la fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

el **discriminante**, Δ, lo definimos como:

$$\Delta=b^2-4ac$$

Según el signo del discriminante, podemos distinguir:

- Si $\Delta>0$, la ecuación tiene soluciones reales distintas.
- Si $\Delta=0$, la ecuación tiene soluciones reales iguales.
- Si $\Delta<0$, la ecuación no tiene soluciones reales, es decir, sus soluciones son números complejos, como se analizó antes.

Ejemplo 1

Determinar la naturaleza de las soluciones de la ecuación $x^2+11x+28=0$.

La ecuación se encuentra en su forma general, por lo que es posible determinar los coeficientes de sus términos.

$$a=1 \qquad b=11 \qquad c=28$$

Con ellos, determinaremos el valor del discriminante.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(11)^2-4(1)(28)$$
$$\Delta=121-112$$
$$\Delta=9$$

En el caso de la ecuación que tratamos, $\Delta>0$, ya que $9>0$; por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales.

Para comprobar dicha conclusión, resolveremos la ecuación cuadrática haciendo uso de la fórmula general para la solución de ecuaciones de segundo grado.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(11)\pm\sqrt{(11)^2-4(1)(28)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{121-112}}{2}$$

$$x=\frac{-11\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$x=\frac{-11\pm3}{2}$$

$$x_1=\frac{-11+3}{2} \qquad x_1=\frac{-11-3}{2}$$

$$x_1=\frac{-8}{2} \qquad x_1=\frac{-14}{2}$$

$$x_1=-4 \qquad x_1=-7$$

La ecuación cuadrática tiene dos raíces reales negativas.

Ejemplo 2

Determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática $4x^2+25=4x$.

La ecuación presenta una forma distinta a la general o estándar, por lo que es necesario igualar el primer miembro de la ecuación a cero.

$$4x^2+25=4x$$
$$4x^2-4x+25=0$$

Ahora sustituimos en el discriminante el valor de los coeficientes cuadrático, lineal e independiente.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(-4)^2-4(4)(25)$$
$$\Delta=16-200$$
$$\Delta=-184$$

Concluimos que las raíces de la ecuación son complejas, debido a que $\Delta<0$.

Comprobaremos la conclusión resolviendo la ecuación; esta vez lo haremos con el método de completar un trinomio cuadrado perfecto.

$$4x^2-4x+25=0$$
$$4x^2-4x=0-25$$
$$\frac{4x^2-4x}{4}=\frac{-25}{4}$$
$$x^2-x=\frac{-25}{4}$$
$$x^2-x+\frac{1}{4}=-\frac{25}{4}+\frac{1}{4}$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{24}{4}$$
$$x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{-6}$$
$$x-\frac{1}{2}=\pm i\sqrt{6}$$

$$x_1=\frac{1}{2}+i\sqrt{6} \qquad x_2=\frac{1}{2}-i\sqrt{6}$$

Es posible ver que la ecuación tenga dos soluciones complejas (hay que recordar que un número complejo se compone de una parte real y una parte imaginaria).

Ejemplo 3

Determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 14x + 49 = 0$.

Determinamos el valor del discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-14)^2 - 4(1)(49)$$
$$\Delta = 196 - 196$$
$$\Delta = 0$$

Por el valor del determinante es posible ver que la ecuación cuadrática tiene una solución real. Resolvemos la ecuación por método de factorización para comprobar nuestra afirmación.

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$
$$(x-7)^2 = 0$$
$$(x-7)(x-7) = 0$$
$$x - 7 = 0$$
$$x = 7$$

LO QUE APRENDÍ

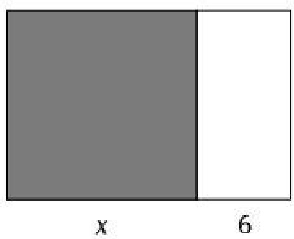
I. Por medio del discriminante de la fórmula general, determina la naturaleza de las soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas; luego, con la fórmula para la solución de ecuaciones de segundo grado, resuélvelas:

1	$x^2 + 2x + 1 = 0$	6	$3x^2 - 7x = -2$	11	$(x-2)(x-9) = 0$
2	$x^2 + 2x = 35$	7	$6a^2 - 7a - 3 = 0$	12	$x^2 + 4x = 3$
3	$x^2 + 6x + 9 = 0$	8	$5x^2 - 19x - 4 = 0$	13	$x^2 = 11 - x$
4	$x^2 + 4x = 165$	9	$x(x+3) = 5x + 3$	14	$x^2 = 10 - 3x$
5	$x^2 + x - 72 = 0$	10	$3(3x-2) = (x+4)(4-x)$	15	$x^2 + 78 = 19x$

PRODUCTO

I. En equipos de tres integrantes, propongan un modelo cuadrático para cada situación y realicen lo que se indica en cada caso.

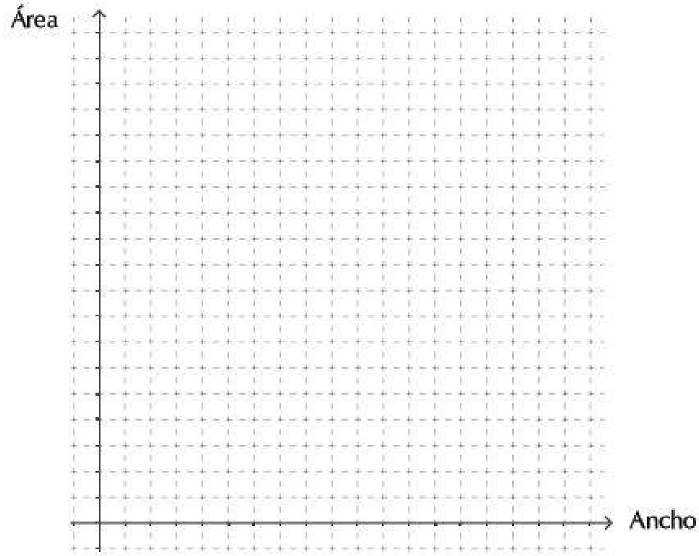
1. Si en un cuadrado de x unidades por lado aumentamos en seis unidades dos lados paralelos, obtenemos un rectángulo. Escriban la expresión que representa el área del rectángulo (R) en función del lado del cuadrado (x). Elaboren una tabla y una gráfica que representen dicha relación para algunos valores del lado del cuadrado.



2. Las dimensiones de un terreno rectangular cumplen la condición de que su largo es el doble de su ancho. Completen la siguiente tabla sobre las dimensiones del terreno:

Ancho	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**x**
Largo							
Área							

Tracen la gráfica que relacione la medida de su ancho con su área.



Si el área del terreno es de 860 m^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

3. El director de un teatro estima que si cobra \$30 por entrada, podría contar con 500 espectadores, y que por cada \$1 que descuente al costo del boleto entrarían 100 personas más. Completa la siguiente tabla sobre los cálculos que realiza el director del teatro.

Pesos de descuento	**0**	**1**	**2**	**3**	***x***
Precio del boleto	30	30 – 1			30 – x
Número de espectadores		500 + 100	500+100( )		
Ingresos	(30)(500)				

¿Cuánto debe descontar al precio de la entrada para obtener una ganancia de \$30,600? ¿Esto sólo puede suceder con un único monto de descuento? ¿Por qué?

Completa la tabla con la finalidad de encontrar el descuento que lleve al director del teatro a obtener la mayor ganancia posible (puedes auxiliarte de una hoja electrónica de cálculo).

ISBN 978-607-32-0935-9

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net